04.12.5

川井 忠彦

統一エネルギー原理総括

1. 固体力学におけるエネルギー保存則

議論を明確に進めるため、固体力学の状態ベクトルを$\left(u_i, \sigma_{ij}\right)$とすれば、$u_i$および$\sigma_{ij}$は各々次の条件式を満足するものとする。

(a) 変位関数$u_i\left(x_i\right)$

線形歪みの定義 ：$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$ ……(1)

変位境界条件 ：$u_i = \bar{u}_i \quad on \ S_u$ ……(2)

$S = S_u + S_\sigma$、S_u：変位境界、S_σ：応力境界

(b) 応力成分σ_{ij}

平衡条件式 ：$\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i = 0 \quad in \quad V$ ……(3)

応力の対称性 ：$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ……(4)

応力の境界条件 ：$t_i = \bar{t}_i \quad on \quad S_\sigma$ ……(5)

$t_i = \sigma_{ij} n_j$ （n_jは境界面上に立てられる外向き単位法線ベクトル）

(c) エネルギー保存則の成立

$$\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dv = \int_v \bar{p}_i u_i dv + \int_{S\sigma} \bar{t}_i u_i ds + \int_{Su} \bar{u}_i t_i ds \quad \cdots\cdots(6)$$

この式はGauss の発散定理を用い、上式諸条件式を用いて誘導できる。言葉で言えば“固体の状態ベクトル$\left(u_i, \sigma_{ij}\right)$が固体力学境界値問題（微小変位弾性論）の正解であるならば、固体に蓄えられる歪エネルギーは外力、即ち物体力、表面力および表面変位のなした仕事に等しい“と言う保存則である。

2. 固体力学における統一エネルギー原理の成立

(6)式は微小変形弾性問題の正解$\left(u_i, \sigma_{ij}\right)$が満足すべき条件式である。実際の解析において正解が求められることは稀有であり、多くの場合その近似解を求めることで満足せねばならない。変分法の立場で考えると求める固体の状態ベクトル$\left(u_i, \sigma_{ij}\right)$は、先ず次の第一変分零の条件を満足しなければならない。即ち、

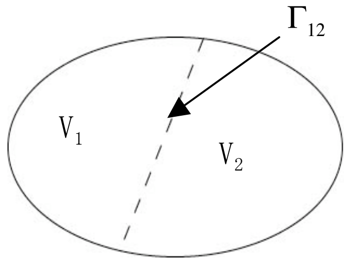
$$\delta\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv - \int_v \overline{p}_i\delta u_i dv - \int_{S\sigma}\overline{t}_i\delta u_i ds - \int_{Su}\overline{u}_i\delta t_i ds = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\left(w.r.t.\ \ u_i \ \&\ \sigma_{ij}\right)$$

(7)式は単一領域問題の場合に成立すべき変分原理であるが、今その領域が 2 つの部分、即ち V_1 と V_2、から成る場合を考えると領域(V,S)を 2 分する境界面を Γ_{12} として(6)式は当然次式のごとく与えられることになる。

$$\begin{aligned}\left(\int_{v_1}\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)}dv + \int_{v_2}\sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(2)}dv\right) &= \left(\int_{v_1}\overline{p}_i^{(1)}u_i^{(1)}dv + \int_{v_2}\overline{p}_i^{(2)}u_i^{(2)}dv\right)\\ &+\left(\int_{S\sigma_1}\overline{t}_i^{(1)}u_i^{(1)}ds + \int_{S\sigma 2}\overline{t}_i^{(2)}u_i^{(2)}ds\right) + \left(\int_{Su_1}\overline{u}_i^{(1)}t_i^{(1)}ds + \int_{Su_2}\overline{u}_i^{(2)}t_i^{(2)}ds\right) \cdots\cdots (8)\\ &+\int_{\Gamma_{12}}\left(t_i^{(1)}u_i^{(2)} + t_i^{(2)}u_i^{(1)}\right)ds\end{aligned}$$

ここに上添字(k)(k=1,2)は領域番号を表し、末尾の表面積分項は両領域の境界面 Γ_{12} における境界変位並びに境界力の相関ポテンシャル（correlation potential）である。(8)式は 2 領域から成る場合のエネルギー保存則であるから 2 つの状態ベクトル $\left(u_i^{(k)},\sigma_{ij}^{(k)}\right)$ (k=1,2)に対する統一エネルギー原理は次式のごとく与えられる。



2 つの領域から構成される固体

$$\begin{aligned}&\left(\delta\int_{v_1}\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)}dv - \int_{v_1}\overline{p}_i^{(1)}\delta u_i^{(1)}dv - \int_{S\sigma_1}\overline{t}_i^{(1)}\delta u_i^{(1)}ds - \int_{Su_1}\overline{u}_i^{(1)}\delta t_i^{(1)}ds\right)\\ &+\left(\delta\int_{v_2}\sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(2)}dv - \int_{v_2}\overline{p}_i^{(2)}\delta u_i^{(2)}dv - \int_{S\sigma_2}\overline{t}_i^{(2)}\delta u_i^{(2)}ds - \int_{Su_2}\overline{u}_i^{(2)}\delta t_i^{(2)}ds\right) \cdots\cdots (9)\\ &+\int_{\Gamma_{12}}\left\{\left(t_i^{(2)}\delta u_i^{(1)} + t_i^{(2)}\delta u_i^{(1)}\right) + \left(t_i^{(1)}\delta u_i^{(2)} + t_i^{(1)}\delta u_i^{(2)}\right)\right\}ds = 0\end{aligned}$$

$$\left(w.r.t.\ \ u_i^{(1)},\sigma_{ij}^{(1)} \ \&\ u_i^{(2)},\sigma_{ij}^{(2)}\right)$$

(9)式は領域 V が 2 つの部分領域から構成されている場合の基礎式を与える。<u>特に末尾の項の存在は、有限要素法は本質的に変位 u_i と応力 σ_{ij} を未知量にとる混合法が最も合理的であることを物語っている。</u>

3.　統一エネルギー原理から導かれる 8 種類の解法原理

(7)式で与えられる統一エネルギー原理の式は次の 2 つの型式で表現ができる。

(a) 型式（I）

$$\left(\int_v \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dv - \int_v \overline{p}_i\delta u_i dv - \int_{S\sigma}\overline{t}_i\delta u_i ds\right) + \left(\int_v \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dv - \int_{Su}\overline{u}_i\delta t_i ds\right) = 0 \cdots\cdots (10)$$

$$\left(w.r.t.\quad u_i \ \& \ \sigma_{ij}\right)$$

(b) 型式 (II)

$$\int_{S\sigma}\left(t_i-\bar{t}_i\right)\delta u_i ds+\int_{Su}\left(u_i-\bar{u}_i\right)\delta t_i ds-\int_v\left(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i\right)\delta u_i dv-\int_v u_i\delta\sigma_{ij,j}dv=0\cdots\cdots(11)$$

$$\left(w.r.t.\quad u_i \ \& \ \sigma_{ij}\right)$$

型式 (I) の表示に従う場合、(10)式左辺の第一括弧は変位u_iに関する変分項、第二括弧は<u>応力</u>σ_{ij}に関する変分項である。第一括弧=0 とおいた式は良く知られた仮想仕事の原理を、第二括弧=0 とおいた式は補仮想仕事の原理を表している。故に固体の状態ベクトル$\left(u_i,\sigma_{ij}\right)$が正解を与えるならば、各々仮想仕事の原理および補仮想仕事の原理を満足していなければならないので、統一エネルギー原理はその代数和であるから、各領域毎に成立する変分式に分かれる（但し、相関ポテンシャルの変分項を含む)。さて、統一エネルギー原理が成立すれば、仮想仕事の原理も補仮想仕事の原理も同時に成立しなければならない。何となれば(10)式左辺の2つの式は正値対称性が仮定できればその一方が成立しなければ(10)式は成立しないことになるからである!!

さて、(11)式は8つの異なる解法に対する変分原理を含んだ一般的変分原理であることを述べる。

固体力学境界値問題は平衡条件式(3)および変位境界条件(2)および応力境界条件(4)を満足する解を求める問題で、その問題に対する最も一般的な変分原理が(11)式で与えられることになる。換言すれば(11)式は上述(2)、(3)および(4)の何れをも予め満足しない場合の最適解（全エネルギー最小の原理に従う）を与える変分式に他ならない。従って、(2)、(3)および(4)を組合せてできる8つの解法は何れも極値原理 (extremum principle) となる!!

8つの解法は先ず応力場σ_{ij}が平衡条件$\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$を満足するか否かで2つのグループに分けられ、応力境界条件を満足するか否かで更に2つに分かれ、最後に変位境界条件を満足するか否かでまた2つに分けられる。即ち、結論として次のような8種類の解法とそれに対する変分原理が導かれる。

付帯境界条件 \ 要素内平衡条件	—	変位境界条件 $u_i = \bar{u}_i$	応力境界条件 $t_i = \bar{t}_i$	$u_i = \bar{u}_i$ $t_i = \bar{t}_i$
—	修正 Reissner 法	DM(I)	EM(I)	GM(I)
	$\int_{S_\sigma}(t_i - \bar{t}_i)\delta u_i dS$ $+\int_{S_u}(u_i - \bar{u}_i)\delta t_i dS$ $-\int_V(\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i)\delta u_i dV = 0$	$\int_{S_\sigma}(t_i - \bar{t}_i)\delta u_i dS$ $-\int_V(\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i)\delta u_i dV = 0$	$\int_{S_u}(u_i - \bar{u}_i)\delta t_i dS$ $-\int_V(\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i)\delta u_i dV = 0$	$\int_V(\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i)\delta u_i dV = 0$
$\sigma_{ij,j} = 0$	Trefftz 法	DM(II)	EM(II)	GM(II)
	$\int_{S_\sigma}(t_i - \bar{t}_i)\delta u_i dS$ $+\int_{S_u}(u_i - \bar{u}_i)\delta t_i dS = 0$	$\int_{S_\sigma}(t_i - \bar{t}_i)\delta u_i dS = 0$	$\int_{S_u}(u_i - \bar{u}_i)\delta t_i dS = 0$	半解析解 —

表Ⅰ　統一エネルギー原理から導かれる８種類の解法とそれに対応する変分原理

$\left(w.r.t.\ \ u_i\ \&\ \sigma_{ij}\right)$

この表Ⅰは一要素解析（Rayleigh-Ritz 法）の場合について８種類の解法を示したものである（全ての解法が混合法である!）。

(a)　この変分原理は固体の状態ベクトルを$\left(u_i, \sigma_{ij}\right)$を未知量にとった場合について考えている。未知量は変位(u, v, w)と応力成分$\left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\right)$の９成分とする混合法(mixed method)である。

(b)　例えば DM(I)は要素状態ベクトル$\left(u_i, \sigma_{ij}\right)$のうち、各要素境界辺または面上で変位の連続性だけを考慮する混合法である。従って、現在標準化されている有限要素法は更に応力成分を全く考慮しない DM(I)と言うことになる。各要素境界上で変位の連続性だけは考慮するが境界力の連続性は無視する解法である。これに対し EM(I)は現在消滅してしまった平衡法(I)と言う方法で予め要素境界上で応力の連続条件だけは充たしている応力σ_{ij}と全く拘束条件ない変位u_iに対する混合変分原理である。GM(I)は、要素周辺境界における状態ベクトルの連続性は予め満足するような要素状態ベクトル$\left(u_i, \sigma_{ij}\right)$を仮定する方法で Galerkin 法(I)と言う解法である。序でながら GM(II)と言う要

素を考えて見るとこの要素は$\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$を満足し、更に要素境界上では変位$u_i$および境界力$t_i$の連続性ををも満たす要素と言うことになる。このような要素開発は原理的に不可能ではないが、それは最早近似解ではなく、直接境界値問題の一般解を用意することを意味する。GM(II)は半解析解要素であるから結局要素境界辺上の流動座標系に関して定義された状態ベクトルを未知量とする境界要素法（BEM）と等価になる ！

(c) このように考えてくると表Ｉの８種類の解法の中で修正 Reissner 法と Trefftz 法は今迄の有限要素法では考えられていなかったユニークな解法であり、残りの６つの解法は要素境界辺上で状態ベクトル$\left(u_i,\sigma_{ij}\right)$の連続性を部分的ないし完全に満足するように設定してから有限要素解析を行う解法で、これらの方法を一般化された有限要素法（Generalized Finite Element Methods）と命名することにする。

換言すれば、現在標準化されている有限要素法はDM(I)の特別な場合であり、要素辺上で変位の連続性しか満足しない解法である。しかも選点法（collocation method）であるから、例えば、平板の曲げ解析では境界辺上での状態ベクトルが$\left(w,\dfrac{\partial w}{\partial n},M_n,V_n\right)$で与えられるから$w$,$\dfrac{\partial w}{\partial n}$の連続性の保証だけでも極めて困難となるのは当然である。この平板曲げ問題のエネルギー解法の壁が契機となり、変位法に代わる混合法開発の可能性が模索された。そして Turner らの直接剛性法（Direct Stiffness Method）誕生の６年前の1950年 Eric Reissner は次のような汎関数 J_R

$$J_R=\int_v\left\{B\left(\sigma_{ij}\right)-\bar{p}_iu_i+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\right\}dv$$
$$-\int_{S\sigma}\bar{t}_iu_ids-\int_{Su}t_i\left(u_i-\bar{u}_i\right)ds \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

から出発して Reissner の原理を導き、混合変分原理開発のパイオニアとなった。この(12)式には J_R の付帯条件として、変位境界条件：$u_i-\bar{u}_i=0 \quad on\ S_u$ を Lagrange の未定係数法を用いて J_R の中に組み込まれている。この式を変形して型式(II)の表現式を求めると次式のごとくなる。

$$\int_{S\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_ids-\int_{Su}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_ids-\int_v(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_idv=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\left(w.r.t.\quad u_i\ \&\ \sigma_{ij}\right)$$

この(13)式を(11)式と比べて見ると、左辺第二項の積分項の前の符号が(+)ではなく(-)であることと(11)式の末尾にある一見不可解な項$-\int_v u_i \delta\sigma_{ij,j} dv$がない点である。先ず、$-\int_v u_i \delta\sigma_{ij,j} dv$なる項は応力の平衡方程式が$\sigma_{ij,j} + f_i = 0$で与えられることを考えると$\delta\sigma_{ij,j} = -f_i$となり、物理的に応力場に存在する物体力項の変分を意味することになる。今、純力学問題を考える場合にはδf_iは無視して差しえないが、少なくとも Reissner の原理からはこのような項の存在が考慮できないことを意味する（例は熱応力問題 etc)。もう一つの符号の違いは極めて重大である。何となれば Reissner の原理から導かれる型式(II)は

$$\boxed{\text{仮想仕事方程式}} - \boxed{\text{補仮想仕事方程式}} = 0$$

となり、両方の変分式が近似解を求める過程で攻めぎ合う形にならないのである。<u>これが Reissner の原理は極値原理になれず停留原理に留まる原因であると判断する</u>。
<u>この結論を拡大解釈すると有限要素法と差分法と並ぶPDEの実用解法まで高めた重み付き残差法(MWR)はLagrangeの未定係数法に基づく数値解法であるから、停留条件以上の期待は持つことができないことになる</u>。

これに対し統一エネルギー原理は Lagrange の未定係数法は使わずに、エネルギー保存則から直接誘導された。その結果、未知状態ベクトル$\left(u_i, \sigma_{ij}\right)$は統一エネルギー原理が示すごとく全エネルギー:$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = A\left(\varepsilon_{ij}\right) + B\left(\sigma_{ij}\right)$が最小となる解を与えることを保証できるのである。

更に統一エネルギー原理を用いて固体の状態ベクトル$\left(u_i, \sigma_{ij}\right)$の近似解を求めると、その計算の途中の段階で歪エネルギー$A\left(\varepsilon_{ij}\right)$と補歪エネルギー$B\left(\sigma_{ij}\right)$の原理が常に攻めぎ合い、近似が進めば最初の近似解が上界値であれば単調に収束する上界解を、また最初の近似解が下界値であれば同様に単調収束の下界解を与えるものとこれまで行ってきた一連の計算結果から判断している。

その一般的証明は関数解析の専門家に期待する以外方法はあるまい。統一エネルギー原理による近似解の単調収束性が保証されるならば、敢えて正解の上下界挟み打ち解法を考える必要はないと考える。

(d) 無節点解法（Non-Collocation Method）と一般化有限要素法（Generalized Finite Element Method）

無節点解法とは、隣接要素間の境界辺または面上で変位または境界力の連続性を考慮する必要のない有限要素解析法で、修正 Reissner 法と Trefftz 法がその場合に当たる。この方法では、隣接要素同士の境界辺上における状態ベクトルの連続性を考慮することなく、境界辺上で導入される流動座標系に関する全体マトリクス方程式が求められる。この場合、要素境界辺または面上の相関ポテンシャルの積分は境界面上の流動座標系に関して実行すれば良く、それによりもっと合理的な状態ベクトルの連続性が実現されることになる。これに反し、一般化有限要素法の場合には、各要素境界辺上において新たに導入された流動座標系に関する級数展開式（有限多項式）を用い、全ての境界辺または面で要素状態変位関数の未定係数が 1：1 の対応が付くように混合型適合要素群の開発が必要となる。平面要素（面内変形、面外変形）および 3 次元要素についても組織的開発を計画中である。これら課題についての詳細な記述は近い将来実行したいと考えている。

4. 有限要素法の現状分析

現在、産業界はあらゆる活動が米国主導の CAE 化が進み、物作りの現場ではアメリカ製汎用ソフトを導入し、如何にして生産性を高めるかと言う点に注目が集まっている。その基礎にある有限要素法のソフトの抜本的な変革や開発を考えることなく、日進月歩の IT 技術の導入により如何に効率化を推進するかと言う一点に世界の注目が集まっていると思われる。

良く考えて見ると一番標準化されている NASTRAN は変位法の代表で、混合法を中心とする解析アルゴリズムではない。

変位法の弱点が指摘されている板殻構造解析においてどの位混合法の思想が盛り込まれているのであろうか？（混合法が採用されているとしても 100% Reissner の原理をベースにしているものと思われる。）有限要素法は現在固体力学から流体力学、電磁界解析、----と重み付き残差法（MWR）の考え方の普及によって変位法を一般化してあらゆる理工学問題の数値解析を行う方向に発展し、FDM や BEM と競合する状況にある。MWR は誠に実用的解法と言う点では特筆に値するが、その解の精度や収束性の問題はどうなっているのであろうか？

特に、正解が未知の非線形解析においてその解の精度保証は殆ど無視され、乱用されているのではと危惧している。この重大問題に本研究会の成果が将来大いに役立つ日が来ることを思い、今後の研究を進めて行きたいと考えている。

5. 金属材料の構成則について

統一エネルギー原理に基づく固体力学諸問題の解析には歪エネルギー$A\left(\varepsilon_{ij}\right)$だけでなく、補歪エネルギー$B\left(\sigma_{ij}\right)$の理論式を求めることが先決である（$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}\right)$）。ここでは問題を金属材料に限定すると歪エネルギー$A\left(\varepsilon_{ij}\right)$は阪大渋谷教授の論文“弾性定数の数理展開”において次のごとく与えられている。

即ち、熱力学状態関数を用いた弾性定数として固体の内部エネルギーU の初期配置近傍における展開式は以下のように表されると述べている。

$$U\left(X,E_{ij},S\right)=U(X,S)+V(X)\left|\sigma_{ij}\right|_{S.\bar{E}}E_{ij}+\frac{1}{2!}C^{A}_{ijkl}\Big|_{S.\bar{E}}E_{ij}E_{kl}+\frac{1}{3!}C^{A}_{ijklmn}\Big|_{S.\bar{E}}E_{ij}E_{jk}E_{mn}+\ldots \qquad \cdots\cdots(A)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
C^{A}_{ijkl}&=\frac{1}{V(x)}\left(\frac{\partial^{2}U}{\partial E_{ij}\partial E_{kl}}\right)_{S,\bar{E}}\\
C^{A}_{ijklmn}&=\frac{1}{V(x)}\left(\frac{\partial^{3}U}{\partial E_{ij}\partial E_{kl}\partial E_{mn}}\right)_{S,\bar{E}}\\
C^{A}_{ijklmnop}&=\frac{1}{V(x)}\left(\frac{\partial^{4}U}{\partial E_{ij}\partial E_{kl}\partial E_{mn}\partial E_{op}}\right)_{S,\bar{E}}\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(B)$$

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

これを要約すると等エントロピー過程における歪エネルギー：$A\left(\varepsilon_{ij}\right)$は次式のごとく歪テンソル$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}\right)$の級数で表される。

$$A(\varepsilon_{ij})=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2!}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\frac{1}{3!}a_{ijklmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn}+\ldots\ldots \qquad \cdots\cdots(C)$$

ここにa_{ijkl} etc は場所 x と温度 T の関数である。このような歪エネルギー：$A\left(\varepsilon_{ij}\right)$の表示式が陽に与えられているならば補歪エネルギー：$B\left(\sigma_{ij}\right)$の存在も

$$B\left(\sigma_{ij}\right)=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-A(\varepsilon_{ij}) \qquad \cdots\cdots(D)$$

の関係から保証される。

<u>歪エネルギー関数$A\left(\varepsilon_{ij}\right)$を既知として$B\left(\sigma_{ij}\right)$を導く方法</u>

応力−歪関係式：

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}(\varepsilon_{kl})\quad \text{i,j,k,l=1,2,3} \qquad \cdots\cdots(a)$$

を仮定し、(a)式は$\varepsilon_{kl}=0$が$\sigma_{ij}=0$対応するように、即ち零歪点は零応力点に対応するように選ぶことにする。もし Jacobian $\partial(\sigma_{11},\sigma_{12}\cdots)/\partial(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12}\cdots)$が$\varepsilon_{kl}=0$含

むある領域内で零とならなければ(a)の逆関数が唯一的に定まる。即ち、

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}(\sigma_{kl})\quad \text{i,j,k,l=1,2,3} \qquad \cdots\cdots (b)$$

Jacobian（関数行列）に関する数学的基礎については、例えば寺沢寛一編“自然科学者のための数学概論”p.p.21-24 参照。特に、次の公式が有用である。

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots x_n)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)}\bullet\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots x_n)}={}_n\overset{n}{I}\quad \text{（n x n の単位マトリクス）} \cdots\cdots (c)$$

今計算すべき Jacobian matrix J は(c)式より

$$J=\frac{\partial(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{23},\sigma_{31})}{\partial(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{12},\varepsilon_{23},\varepsilon_{31})}\bullet\frac{\partial(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{12},\varepsilon_{23},\varepsilon_{31})}{\partial(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{23},\sigma_{31})} \qquad \cdots\cdots (d)$$

で与えられる。ところで$A(\varepsilon_{ij})$および$B(\sigma_{ij})$の定義から

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}},\quad \varepsilon_{ij}=\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}} \qquad \cdots\cdots (e)$$

の関係式が成立する。従って、(4)式を用いて

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}=\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}=\frac{1}{2!}a_{ijkl} \qquad \cdots\cdots (f)$$

の関係式が成立する。従って、J マトリクスの左上隅の成分 J_{11} とすれば

$$J_{11}=\frac{1}{2!}a_{1111}\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{11}^2}+\frac{1}{2!}a_{1122}\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{11}\partial\sigma_{12}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2!}a_{1131}\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{11}\partial\sigma_{31}}=1 \qquad \cdots\cdots (g)$$

と言う式が得られる。以下同様にして（次頁参照）$J_{12}=J_{13}=\cdots\cdots=J_{16}=0$ 等の式が計 36（6 x 6）得られる。$\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}$ を b_{ijkl} とすればこれらの係数は補歪エネルギー

$$B(\sigma_{ij})=b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \qquad \cdots\cdots (h)$$

の係数に他ならない。従って, (g)式で代表されている${}_6\overset{6}{\mathrm{I}}$の各要素の 1 次式 36 個は補歪エネルギー$B(\sigma_{ij})$の 2 次関数をを構成する 36 個の係数であるから、この 36 元 1 次方程式を解けば b_{ijkl} が一意的に決定され、$A(\varepsilon_{ij})$と補完の関係にある補歪エネルギー式関数$B(\sigma_{ij})$即ち$A(\varepsilon_{ij})$の逆関数が決定されることになる!!（実際には a_{ijkl}、b_{ijkl} は座標 x_k、温度 T の関数であるからその計算は相当面倒なことになる)。

$$\frac{\partial(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{23},\sigma_{31})}{\partial(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{12},\varepsilon_{23},\varepsilon_{31})}\bullet\frac{\partial(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{12},\varepsilon_{23},\varepsilon_{31})}{\partial(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12},\sigma_{23},\sigma_{31})}={}_{6}\prod^{6}$$ の計算

						$\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{11}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{22}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{33}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{12}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{23}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{31}}$
						$\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{11}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{22}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{33}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{12}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{23}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{31}}$
						$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{11}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{22}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{33}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{12}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{23}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{31}}$
						$\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{11}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{22}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{33}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{12}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{23}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{31}}$
						$\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{11}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{22}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{33}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{12}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{23}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{31}}$
						$\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{11}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{22}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{33}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{12}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{23}}$	$\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{31}}$
$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}}$	$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}}$	$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{33}}$	$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{12}}$	$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{23}}$	$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{31}}$	1	0	0	0	0	0
$\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{11}}$	$\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{22}}$	$\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{33}}$	$\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{12}}$	$\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{23}}$	$\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{31}}$	0	1	0	0	0	0
$\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{11}}$	$\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{22}}$	$\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{33}}$	$\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{12}}$	$\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{23}}$	$\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\varepsilon_{31}}$	0	0	1	0	0	0
$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varepsilon_{11}}$	$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varepsilon_{22}}$	$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varepsilon_{33}}$	$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varepsilon_{12}}$	$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varepsilon_{23}}$	$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\varepsilon_{31}}$	0	0	0	1	0	0
$\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\varepsilon_{11}}$	$\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\varepsilon_{22}}$	$\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\varepsilon_{33}}$	$\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\varepsilon_{12}}$	$\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\varepsilon_{23}}$	$\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\varepsilon_{31}}$	0	0	0	0	1	0
$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\varepsilon_{11}}$	$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\varepsilon_{22}}$	$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\varepsilon_{33}}$	$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\varepsilon_{12}}$	$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\varepsilon_{23}}$	$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\varepsilon_{31}}$	0	0	0	0	0	1

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{11}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{11}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{33}}\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{11}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{12}}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{11}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{23}}\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{11}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{31}}\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{11}}=1$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{22}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{22}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{33}}\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{22}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{12}}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{22}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{23}}\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{22}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{31}}\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{22}}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{33}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{33}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{33}}\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{33}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{12}}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{33}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{23}}\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{33}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{31}}\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{33}}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{12}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{12}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{33}}\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{12}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{12}}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{12}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{23}}\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{12}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{31}}\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{12}}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{23}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{23}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{33}}\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{23}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{12}}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{23}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{23}}\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{23}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{31}}\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{23}}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\sigma_{31}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}}\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\sigma_{31}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{33}}\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\sigma_{31}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{12}}\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial\sigma_{31}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{23}}\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial\sigma_{31}}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{31}}\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial\sigma_{31}}=0$$

etc

6. いわゆる盲腸の項の物理的意義について

統一エネルギー原理

$$\int_{S\sigma}\left(t_i-\bar{t}_i\right)\delta u_i ds+\int_{Su}\left(u_i-\bar{u}_i\right)\delta t_i ds-\int_v\left(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i\right)\delta u_i dv\underline{-\int_v u_i\delta\sigma_{ij,j}dv=0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

アンダーラインの項は固体の平衡方程式が次式

$$\sigma_{ij,j}+\left(\bar{p}_i+f_1+f_2+\cdots\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

により与えられると仮定しよう。(2)式左辺の括弧内の項 f_{i}(i=1,2,3……)は物体力 $\bar{p}_i$ 以外の体積力項の存在を意味する。卑近な例として不均一温度場の中に物体が置かれた場合には熱膨張のため f_{i} を熱膨張による固体内に生じる体積力とすれば

$$f_1=\frac{E\alpha T}{1-2\nu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

この例は最も理解し易い物体力の例である。実際の物作りの現場では電磁力、化学反応や熱処理などによって色々な形の物体力の発生を考慮する必要があり、その寄与項が $\sigma_{ij,j}+f_i=0$ とすれば(1)式の末尾の項は $\int_v u_i\delta f_i dv$ で与えられる。即ち、盲腸の項の寄与を考慮するには熱力学的考察が必要となる!!

7. 微小変形弾性論における変分原理

1. 数学的定式化

釣合方程式　：$\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i = 0$ ……………(1)

応力-歪関係式　：$\sigma_{ij} = \dfrac{E}{1-2\nu} e\delta_{ij} + 2G\varepsilon'_{ij}$ ……………(2)

or　$\varepsilon_{ij} = \dfrac{1-2\nu}{E}\sigma\delta_{ij} + \dfrac{\sigma'_{ij}}{2G}$ ……………(3)

ここに　$\sigma = \dfrac{1}{3}\sigma_{ii}$ ，$e = \dfrac{1}{3}e_{ii}$ ……………(4)

$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ ，$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}$ ……………(5)

σ'_{ij}、ε'_{ij} はそれぞれ偏差応力、偏差歪みである。

適合条件式　：$\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$ ……………(6)

境界条件　：$t_i = \sigma_{ij} n_j$ として

応力境界条件　$t_i = \bar{t}_i \quad on \quad S_\sigma$ ……………(7)

変位境界条件　$u_i = \bar{u}_i \qquad on \; S_u$ ……………(8)

$S = S_u + S_\sigma$

2. 従来の変分定式化

1) 第一の変分原理（仮想仕事の原理）

先ず歪エネルギー関数 A を次式より定義する。

$A(\varepsilon_{IJ}) = \dfrac{1}{2}\sigma_{IJ}\varepsilon_{IJ} = \dfrac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \dfrac{3E}{2(1-\nu)}e^2 + G\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}$ ……………(9)

仮想仕事の原理は次式より与えられる。

$\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dv - \int_v \bar{p}_i \delta u_i dv - \int_{S\sigma} \bar{t}_i \delta u_i ds = 0$ ……………(10)

この式は $A(\varepsilon_{IJ})$ を用いて次式のように書くこともできる。

$\int_v \delta A(\varepsilon_{ij}) dv - \int_v \bar{p}_i \delta u_i dv - \int_{S\sigma} \bar{t}_i \delta u_i ds = 0$ ……………(11)

$\left(w.r.t. \quad u_i\right)$

2) 第二の変分原理（補仮想仕事の原理）

先ず補歪エネルギー関数 B は次式のごとく与えられる。

$B(\sigma_{IJ}) = \dfrac{1}{2}\sigma_{IJ}\varepsilon_{IJ} = \dfrac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = \dfrac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2 + \dfrac{1}{4G}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$ ……………(12)

従って、補仮想仕事の原理は次式により与えられる。

$\int_v \delta B(\sigma_{ij}) dv - \int_{S\sigma} \bar{u}_i \delta t_i ds = 0$ ……………(13)

$\left(w.r.t. \quad \sigma_{ij}\right)$

3. 統一エネルギー原理

(12)式と(13)式を統合して次式のごとく与えられる。

$$\delta\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv - \int_v \bar{p}_i \delta u_i dv - \int_{S\sigma} \bar{t}_i \delta u_i ds + \int_{Su} \bar{u}_i \delta t_i ds = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

$$\left(w.r.t. \quad u_i \ \& \ \sigma_{ij}\right)$$

この式は次式のように書くこともできる。

$$\int_v (\delta A(\varepsilon_{ij}) + \delta B(\sigma_{ij}))dv - \int_v \bar{p}_i \delta u_i dv - \int_{S\sigma} \bar{t}_i \delta u_i ds + \int_{Su} \bar{u}_i \delta t_i ds = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

$$\left(w.r.t. \quad u_i \ \& \ \sigma_{ij}\right)$$

(14)式は次式のごとく変形することもできる。

$$\int_{S\sigma}\left(t_i - \bar{t}_i\right)\delta u_i ds + \int_{Su}\left(u_i - \bar{u}_i\right)\delta t_i ds - \int_v \left(\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i\right)\delta u_i dv - \int_v u_i \delta\sigma_{ij,j} dv = 0 \quad \cdots\cdots (16)$$

$$\left(w.r.t. \quad u_i \ \& \ \sigma_{ij}\right)$$

純力学問題の場合、(16)式の末尾項（連成項）は不要となる。

$$\int_{S\sigma}\left(t_i - \bar{t}_i\right)\delta u_i ds + \int_{Su}\left(u_i - \bar{u}_i\right)\delta t_i ds - \int_v \left(\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i\right)\delta u_i dv = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$\left(w.r.t. \quad u_i \ \& \ \sigma_{ij}\right)$$

8. 塑性流れ理論に基づく非弾性増分解析原理の開発

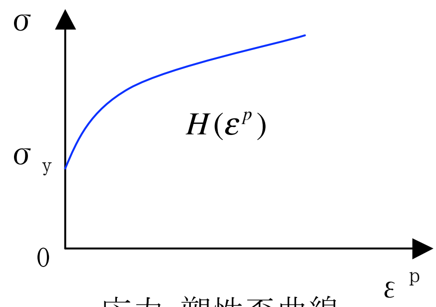
1) 加工効果材料に対する Prandtl-Reuss の方程式
材料の単軸引張試験により得られる応力-塑性歪曲線（岩田啓三著：材料の力学、培風館、pp. 161-169 より抜粋)。

$$\sigma = H(\varepsilon^p) \qquad (11.41)$$

$$\bar{\sigma} = H\left(\int d\bar{\varepsilon}_p\right) \qquad (11.42)$$

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon^p}{\bar{\sigma}} \qquad (11.43)$$

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon_p} \text{ とすると } \quad d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\sigma}}{H'\bar{\sigma}} \qquad (11.44)$$



応力-塑性歪曲線

が得られる。このようにして加工硬化を示す材料について $d\lambda$ を具体的に示すことができる。さて、(11.44)式を(11.43)に代入すれば

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\sigma}}{H'\bar{\sigma}}\sigma'_{ij} \qquad (11.45)$$

となる。歪みの弾性成分については、(11.46)式の増分系は

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^e &= \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} \\ d\varepsilon_{kk} &= \frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma_{kk} \end{aligned}\right\} \qquad (11.46)$$

で与えられる。全歪みは弾性成分と塑性成分の和

$$d\varepsilon'_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

で与えられるから、材料の塑性域における構成方程式は(11.45)と(11.46)式を結合して

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon'_{ij} &= \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{3}{2}\frac{d\bar{\sigma}}{H'\bar{\sigma}}\sigma' \\ d\varepsilon_{kk} &= \frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma_{kk} \end{aligned}\right\} \qquad (11.47)$$

となる。上式の第二式は応力の静水圧成分と平均垂直歪（体積変化率）は塑性領域においても比例することを表している。この式に更に体積歪成分 $\frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma\delta_{ij}$ を加えて完全な応力-歪関係式を求めると次式のごとくなる。

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= \frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma\delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{3\sigma'_{ij} d\bar{\sigma}}{2\bar{\sigma}H'} \quad & d\bar{\sigma} \geq 0 \\ d\varepsilon_{ij} &= \frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma\delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} & d\bar{\sigma} \prec 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

増分の代わりにこれを dt（t は時間）で割った、いわゆる速度を“・”を付けて表すことにすれば、(a)式は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{(1-2\nu)}{E} \dot{\sigma}\delta_{ij} + \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G} + \frac{3\sigma'_{ij}\dot{\bar{\sigma}}}{2\bar{\sigma}H'} \quad & \dot{\bar{\sigma}} \geq 0 \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{(1-\nu)}{E} \dot{\sigma}\delta_{ij} + \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G} & \dot{\bar{\sigma}} \prec 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

(a)式および(b)式を加工硬化材料に対する Prandtl-Ruess の方程式と呼んでいる。ここで、(a)式の逆関係式を求めるために(a)式の第一式の両辺に σ'_{ij} を掛けて総和をとると

$$\bar{\sigma}\left(\frac{1}{3G} + \frac{1}{H'}\right) d\bar{\sigma} = d\sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad \text{(c)}$$

が得られる。加工硬化材料であるから、$H' \succ 0$ である。従って、$d\bar{\sigma} \geq 0$ は $\sigma'_{ij}\varepsilon_{ij} \succ 0$ に対応することが確かめられる。(a)式を $d\sigma'_{ij}$ について解けば

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= \frac{E}{(1-2\nu)} de\delta_{ij} + 2G\left[d\varepsilon'_{ij} - \frac{\sigma'_{kl} d\varepsilon_{kl}}{\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2\left(\frac{H'}{3G}+1\right)} \sigma'_{ij}\right] \quad & \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0 \\ d\sigma_{ij} &= \frac{E}{(1-2\nu)} de\delta_{ij} + 2G d\varepsilon'_{ij} & \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} \prec 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

が得られる。ここに $de = \frac{1}{3} d\varepsilon_{ii}$ である。

2) 歪増分塑性論に対する統一エネルギー原理

鷲津久一郎著“塑性論”（岩波講座 現代応用数学 B7 pp. 17-25 より抜粋）

対象とする問題は Prandtl-Ruess の方程式に従う材料で次の諸条件を満足する解を求めることである。

釣合方程式：$\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i = 0$ ……………(6. 1)

適合条件式：$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i}\right)$ ……………(6. 2)

境界条件　：$t_i = \sigma_{ij} n_j$ として ……………(6. 3)

力学的境界条件　$d\sigma_{ij} n_i = d\bar{t}_i \quad on\ S_\sigma$ ……………(6. 4)

幾何学的境界条件　$du_i = d\bar{u}_i \quad on\ S_u$ ……………(6. 5)

$$S = S_u + S_\sigma$$

この問題に対して次の 2 つの変分原理が成立する。

第 1 の変分原理：（上界定理）

幾何学的境界条件(6. 5)式を満たす変位増分の 1 組を du_i^* とし、適合条件(6. 2)式により du_i^* から導かれる歪増分を $d\varepsilon_{ij}^*$ とするとき

$$\int_V dA^* dv - \int_{S\sigma} dt_i du^* ds \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6.6)$$

を最小にするものが正解を与える。ここに dA*は

$$dA = \frac{3E}{2(1-2\nu)}(de)^2 + G\left[d\varepsilon'_{ij} d\varepsilon'_{ij} - \frac{(\sigma'_{kl} d\varepsilon_{kl})^2}{\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2 (\frac{H'}{3G}+1)} \right] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6.7)$$

の $d\varepsilon_{ij}$ を $d\varepsilon_{ij}^*$ で置換したものである。

第 2 の変分原理：（下界定理）

釣合方程式(6. 1)式と力学的境界条件(6. 4)式とを満足する応力増分の一組を $d\sigma_{ij}^*$ とするとき、

$$\int_V dB^* dv - \int_{Su} dt_i^* d\bar{u}_i ds \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6.8)$$

を最小にするものが正解を与える。ここに dB*は、

$$dB = \frac{3(1-2\nu)}{2E}(d\sigma)^2 + \frac{d\sigma'_{ij} d\sigma'_{ij}}{4G} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6.9)$$

の $d\sigma_{ij}$ を $d\sigma_{ij}^*$ で置換したものである。ここに $e = \frac{1}{3}e_{ii}$ ， $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ である。

従って、標題の歪増分塑性論に対する統一エネルギー原理は(6. 6)式および(6. 8)式で与えられる変分原理を統合して次式のごとく与えられる。

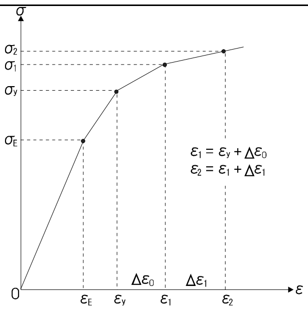
統一エネルギー原理

(6. 1)式から(6. 5)式で与えられる固体の増分状態ベクトルを $(du_i^*, d\sigma_{ij}^*)$ とすれば

$$\int_V (dA^* + dB^*) dv - \int_{S\sigma} d\bar{t}_i du^* ds - \int_{Su} dt_i^* d\bar{u}_i ds \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6.10)$$

を最小にするものが正解を与える。

統一エネルギー原理による材料非線形問題の増分解析

統一エネルギー原理による微小変形弾性解析<u>弾性限荷重 P_E</u> 及びその時点における固体状態ベクトル (U_i, σ_{ij}) の決定	$\int_v \delta A(\varepsilon_{ij}) + B(\sigma_{ij}))dV$ $-\int_v \bar{p}_i \delta u_i dV - \int_{s_\sigma} \bar{t}_i \delta u dS$ $-\int_{s_u} \bar{u}_i \delta t_i = 0$ $(w, r, t, u_i, \&, \sigma_{ij})$	$A(\varepsilon_{ij}) = \frac{3E}{2(1-2\upsilon)} e^2 + G\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'_{ij}$ $B(\sigma_{ij}) = \frac{3(1-2\upsilon)}{2E}\sigma^2 + \frac{1}{4G}\sigma'_{ij} + \sigma'_{ij}$
<u>初期降伏荷重 P_0</u> 及び固体状態 ベクトル (u_i, σ_{ij}) の決定	Von Mises の降伏条件 $\bar{J}'_2 = k^2 = \frac{\sigma_y^2}{3}$ $\bar{J}'_2 = \frac{1}{V}\int_v J'_2 dV = k^2$ により有限個の要素の同時降伏を判定する $P_y = p_E + \triangle P_0$	
統一エネルギー原理による <u>微小変形弾塑性増分解析</u> 第 n 荷重増分過程 $P_n = P_{n-1} + \triangle P_{n-1}$ P_{ult} は第 k 増分載荷過程で荷重増分幅 $\triangle P_k$ が計算不能になる時の荷重である	$\int_v (\delta A^*(\varepsilon_{ij}) + \delta B^*(\sigma_{ij}))dV$ $-\int_v \bar{P} i \delta u_i^* dV - \int_{S_\sigma} \bar{t} i \delta u_i^* dS$ $-\int_{S_u} \bar{u} i \delta t_i^* dS = 0$ 荷重増分(n-1)ステップの載荷荷重 $P_n = P_{n-1} + \Delta P_{n-1}$，前増分荷重 $P_{n-1} = P_{n-2} + \Delta P_{n-1}$ の終了段階で塑性化領域の拡がり及びそれに対応する固体の状態ベクトル $(u_i, \sigma_{ij})_{n-1}$ をする	$dA = \frac{3E}{2(1-2\upsilon)}(de)^2$ $+G\left[d\varepsilon'_{ij} d\varepsilon'_{ij} - \frac{(\sigma'_{kl} d\varepsilon_{kl})^2}{\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2(\frac{H'}{3G}+1)}\right]$ dA^* は上式で $d\varepsilon_{ij}$ を $d\varepsilon_{ij}^*$ に置換したものである．同様に，dB^* は， $dB = \frac{3(1-2\upsilon)}{2E}(d\sigma)^2 + \frac{d\sigma'_{ij} d\sigma'_{ij}}{AG}$ の式で $d\sigma_{ij}$ を $d\sigma_{ij}^*$ に置換したものである
最 終 荷 重　P_u(Ultimate Load) の決定	上記増分載荷の過程を繰り返して行くと次第に ΔP に対する固体状態ベクトル (u_i, σ_{ij}) の増加が大きくなり，計算不能となる．その状態に対応する荷重が最終荷重(P_u)である	2004.11.24 川井忠彦