平成 17 年 1 月 29 日発表

卒業論文概要

統一エネルギー原理に基づく有限要素法の研究

A Study on the Finite Element Method based on the Unified Energy Principle

m00111143　相澤　慶
指導教員　野村　大次

The Finite Element Method used a lot now is based on the method called the "Displacement Method". In the case of the simple problem which is resulted for a theoretical solution, it is easy to guarantee the solution by comparison, but in the case of the problem which is not so, this method has developed while the guarantee has been difficult. On the other hand, Emeritus Professor Tadahiko Kawai, Tokyo University, made revitalize the "Stress Method" lapsed in the past, and approached the "Unification Energy Principle" carried out the solution's existence range by approaching from both upper and lower position; the former is the "Displacement Method" and the latter is the "Stress Method". Then, this study develops the "Beam Structural Analysis Program" based on the "Unified Energy Principle", and carries out the realization of the method describing above, and then examines its validity.

１．緒言

現在多く用いられている有限要素法は変位法と呼ばれる方法に基礎をおいている．この変位法は理論解が求められる簡単な問題では比較による解の保証が容易だが，そうでない問題の場合は保証が困難なまま発展してきた方法である．一方，川井忠彦東大名誉教授は過去に消滅した応力法を復活させ，解に上界から近づく変位法と下界から近づく応力法によって解の存在範囲を挟み打ちにする「統一エネルギー原理」を提案された．そこで，本研究はこの「統一エネルギー原理」基づく梁構造解析プログラムを開発し，上記解法の実現とその妥当性について梁要素に関し検討するものである．

２．変位型有限要素法による梁構造解析

有限要素法(Finite element method)とは，連続体を幾つかの要素に分けて考え，要素ごとに方程式を作り，それをもとに全体としての方程式を組み立てて解く方法のことをいう．

一般的な連続体の問題は，数学的に記述すれば偏微分方程式の問題になり，それを解くことは一般に容易でない．しかし物体を細かく分割し，個々の小部分だけについて考えるならば，その特性を比較的簡単な式で近似的に表すことができる．そのような式を総合して解けば全体としての近似解を得ることができる. これが有限要素法の基本的な発想である.

この発想を具現化するには，部分ごとの方程式を総合して全体の方程式を組立てる組織的方法，そうして作られた大規模な方程式を効率よく解く方法などを工夫することが必要である．これらの諸点を解決したのが, 実務的意味における有限要素法である.

現在一般的に用いられている有限要素法は，変位法と呼ばれる方法に基づいている．これは，節点変位を方程式の未知数にする方法である．

今回研究の第一歩として変位型有限要素法の詳細把握のため，FORTRAN 言語を用いて変位型有限要素法による梁構造解析プログラムを作成し，次の例題を解析した．

① 自由端に集中荷重を受ける片持ち梁
② 中央に集中荷重を受ける両端支持梁
③ 全体に等分布荷重を受ける片持ち梁
④ 部材の半分に部分分布荷重を受ける両端支持梁

解析の結果，全例題共理論解との相対誤差は約 0.04[%]となり，梁構造問題における変位型有限要素法はほぼ完成の域に達していると言える．

例題の解析例として①の問題の変形図を**図１**に，BMD を**図２**にそれぞれ示す．

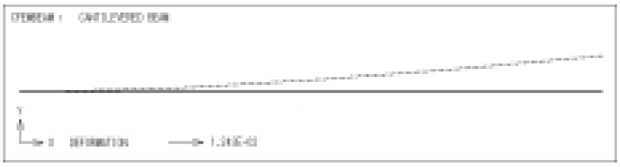

図１　変形図

図２　ＢＭＤ

３．統一エネルギー原理に基づく梁構造解析

統一エネルギー原理とは，解に上界から近づく変位法と下界から近づく応力法をエネルギー保存則により統一化し，理論解を上下から挟み打ちにして解の精度保証を実現する有力な考え方である．

以下，この統一エネルギー原理を梁構造解析に適用できるよう定式化する．

統一エネルギー原理では下の汎関数を最小化する方法である．

$$\Pi_t = U - W \tag{1}$$

ここに梁の場合は，

$$U = \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV \tag{2}$$

梁理論から(2)をまとめると，

$$\begin{aligned} U = & -\theta_j M_j + \theta_i M_i + v_j F_j \\ & - v_i F_i - \int_l v \frac{dF}{dx} dx \end{aligned} \tag{3}$$

(1)の中のWは外力と強制変位のポテンシャルを表す．Wは(3)に境界条件と平衡条件を導入することにより得られる．

$$\begin{aligned} W = & -\bar{\theta}_j M_j - \theta_j \overline{M}_j + \bar{\theta}_i M_i + \theta_i \overline{M}_i \\ & + \bar{v}_j F_j + v_j \overline{F}_j - \bar{v}_i F_i - v_i \overline{F}_i \\ & - \int_l \bar{v} \frac{dF}{dx} dx + \int_l v \bar{q} dx \end{aligned} \tag{4}$$

梁の具体的な汎関数は(1)に(3)と(4)を代入することにより得られる．

$$\begin{aligned} \Pi_t = & -\theta_j M_j + \theta_i M_i + v_j F_j - v_i F_i \\ & - \int_l v \frac{dF}{dx} dx + \bar{\theta}_j M_j - \theta_j \overline{M}_j \\ & + \bar{\theta}_i M_i + \theta_i \overline{M}_i + \bar{v}_j F_j + v_j \overline{F}_j \\ & - \bar{v}_i F_i - v_i \overline{F}_i - \int_l \bar{v} \frac{dF}{dx} dx + \int_l v \bar{q} dx \end{aligned} \tag{5}$$

(5)を変分原理を用いて変形して行くと，最終的に次の連立方程式を解く問題となる．

$$\boldsymbol{Ka} = \boldsymbol{F} \tag{6}$$

ここで $\boldsymbol{K}$ は全体システムマトリックス，$\boldsymbol{a}$ は未知パラメータ，$\boldsymbol{F}$ は等価荷重ベクトルである．

本研究では，この統一エネルギー原理に基づく梁構造解析プログラムを FORTRAN 言語を用いて開発し，例題を解析した．

上記変位型有限要素法との比較も考慮して同一形状例題を含む次の例題を用意した．

① 自由端に集中荷重を受ける片持ち梁

② 全体に等分布荷重を受ける片持ち梁

③ 全体に等分布荷重を受ける枕片持ち梁

解析の結果，全例題共理論解との相対誤差は約 0.001[%]以内となり，梁構造問題における統一エネルギー原理が実証されたと言える．

例題の解析例として①の問題の変形図を**図４**に，BMD を**図５**にそれぞれ示す．

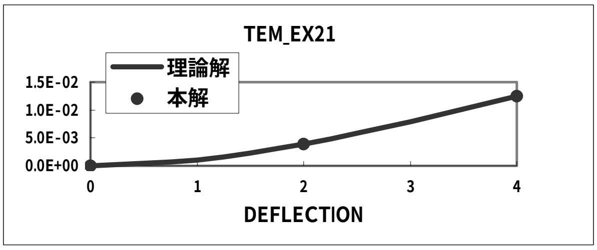

図４　変形図

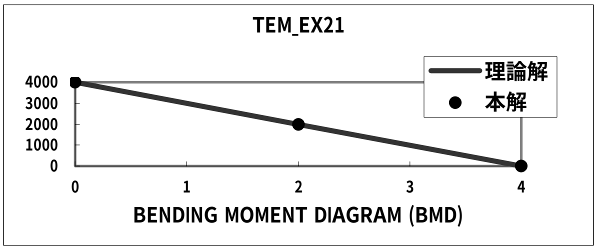

図５　BMD

４．結言

統一エネルギー原理に基づく有限要素法を，梁要素に関して定式化し，梁構造解析プログラムを開発した．解析による解は実用上理論解と一致した．これは例題が単純な梁問題であったこと，統一エネルギー原理に基づく定式化が妥当であったことなどに起因するものであろう．

本プログラムが本原理に基づく求解を実現したことは，本原理の肝である上下界挟み打ち解法を実現したことと同義であり，それは現在までの有限要素法の課題でもあった解の精度保証という観点から見ても非常に有意義なことであると言えるであろう．

謝辞

本研究を行うにあたりご指導いただいた野村大次教授，川井忠彦教授，風間悦夫教授にこの場を借りて御礼申し上げる．

参考文献

1) 川井忠彦，有限要素法と共に歩んだ半世紀，(2004)
2) 風間悦夫, 統一エネルギー原理に基づいた不静定ばりの解析，(2004)
3) 戸川隼人，有限要素法概論，培風館(1981)
4) 杉江日出澄，岡崎明彦，岩堀祐之，小栗宏次，FORTRAN77 と数値計算法，培風館(1991)
5) 有光隆，図解でわかるはじめての材料力学，技術評論社 (1999)