計算工学講演会論文集　Vol.11 (2006年6月)　計算工学会

統一エネルギー原理に基づいた骨組構造解析

Framed Structural Analysis based on Unified Energy Principle

野村大次 [1)]，翁長祥[2)]，川井忠彦[3)]
Daiji Nomura , Sachi Onaga and Tadahiko Kawai

1) ものつくり大学　技能工芸学部　製造技能工芸学科　教授（〒361-0038　埼玉県行田市前谷333番地）
2) ものつくり大学大学院 ものつくり学研究科 ものつくり学専攻（〒361-0038　埼玉県行田市前谷333番地）
3) 工博　ものつくり大学　客員教授（〒361-0038　埼玉県行田市前谷333番地）,東京大学名誉教授

Framed Structural Analysis was established by Slope-Deflection Method in the early 20th Century. With the progress of Electric Computer, it was completed by the Displacement Method. But, Force Method has more advantage in structural design. In this paper, a Framed Structural Analysis based on the mixed Method is reported.

Key Words: *Displacement Method, Force Method, Unified Energy Principle, Framed Structural Analysis*

1． はじめに

骨組構造解析は前世紀の始めに提案された撓角撓度法(Slope-Deflection Method)により完成された.

前世紀の半ばに科学技術計算専用の電子計算機が出現し, 骨組構造解析用のFRANが開発されて問題は一挙に解決された．併しその解法は所謂変位法(Displacement Method)であって，不静定力を未知量にとる応力法(Force Method)[1)]はそれにより影を潜める結果になった.

併しながら部材断面力を未知量にとる応力法は設計上の観点からは有用であり，弾塑性解析の立場から考えると変位法は，応力法に一歩譲らざるを得ない.

本小論は, 変位関数のG.G.Stokes表現を用い部材の中点を原点にとると，梁要素の場合その変位(u,v,w,θ,ϕ,χ)と断面力(V_x,V_y,P,M_x,M_y,M_z)を未知量にとった混合法(mixed method)による厳密な解法が可能であることを示したものである．(記号は図1を参照)

2． 骨組構造の混合法による解析

骨組構造解析は前世紀半ばIBM社が電子計算機による汎用骨組構造解析プログラム“ FRAN ”を発表し，つづいてMITグループはICES”STRUDL”の開発に成功した. そして1970年頃から科学技術計算の汎用プログラム実用化時代に突入して行ったことは記憶に新しい．これらの汎用骨組構造解析プログラムはいずれも変位法(DM)に基づいて完成の域に達したので，今更応力法(FM)のプログラムの開発を考えるのは無意味のように思われる．それにも拘らず著者らがここで改めて話題に取り上げる理由は二つある．即ち

(ｉ)梁要素はその剛性ならびに撓性マトリックスが簡単に解析解*の形で求められる．従って有限要素解析の立場に立って考えると今梁の中点の節点変位及び節点力ベクトル(換言すれば要素状態ベクトル)をパラメータとする特性マトリックス(剛性＋撓性マトリックス)を構成することが可能である．これは川井が提案した統一エネルギー原理[2)]で分類すれば第8番目の要素GM(Ⅱ)要素ということができる．（*解析解=一般解＋特解：$u = u_g + u_p$）

(ⅱ)この様にして求められた梁のGM(Ⅱ)要素を用いれば,解析しようとする骨組構造が如何に複雑な空間構造であっても，すべての節点での力の平衡条件式と変位の連続条件式を求め，骨組全体の要素状態ベクトルに関するマトリックス方程式を導き，厳密に解く事が出来る.

ここで梁の曲げ変形問題を例にとってその完全解を考える．(図1参照)

$$EI_y u''''(z) = q(z) \tag{1}$$

ここでq(z)は分布荷重を与える関数である．その完全解u(z)は次式のごとく与えられる．ここでu_pは特解である.

$$u(z) = u_g(z) + u_p(z) \tag{2}$$

$u_g(z)$ は $u''''(z) = 0$ の一般解で次式のごとく表わされる．ここで添字の0は要素重心での値である.

$$u_g(z) = u_0 + \phi_0 z + \frac{M_{y0}}{2EI_y} z^2 - \frac{V_{x0}}{6EI_y} z^3 \tag{3}$$

従って，一本の梁の曲げ変形問題ならばその解は(1),(2)及び(3)式より

$$u(z) = u_0 + \phi_0 z + \frac{M_{y0}}{2EI_y} z^2 - \frac{V_{x0}}{6EI_y} z^3 + u_p(z) \tag{4}$$

で与えられる．従ってこの梁の両端の境界条件，即ち固定，単純支持及び自由の境界条件を導入することにより未定係数(u_0, ϕ_0, M_0, V_0)に関する連立一次方程式を導いてそれを解けば問題は解けたことになる．

ところがそれが骨組構造となるとすべての梁及び柱部材がその両端の節点(joints)における変位の連続条件式及び力の平衡条件式を満足する様に決定されなければならない．これらの条件式はすべて節点力，節点変位を全体座標系(あるいは基準座標系)に変換して変位の連続条件及び節点力の平衡条件式を立てなければならない．そうするとその全体の方程式は変位の連続条件式のグループと各節点における節点力の平衡条件式の2種類のマトリックス方程式が得られる．

変位の連続条件式は各節点において異なる部材間についてすべて漏れなく構成されなければならない．今n個の部材がその節点で結合されている場合(n-1)個の条件式が立てられることになる．これに対し節点力の平衡条件式は各節点において6つ(3次元空間の場合)得られる．

以上は内部境界節点の場合であったが外部境界節点の場合はその節点が固定,支持あるいは自由により次の様になる．例えば曲げ変形に対しては次の様になる．

(a) 固定： $u = \bar{u}$ ， $u' = \bar{u}'$ 　($\bar{u}$ 等は既知の値)
(b) 支持： $u = 0$ ， $M = EI_y u'' = 0$
(c) 自由： $M = EI_y u'' = 0$ ， $V = EI_y u''' = 0$

軸変形wと捩り変形χの基礎方程式は簡単な2階の常微分方程式で，境界条件としては次式で与えられる．

(d) 変位境界条件： $w = \bar{w}$ ， $\chi = \bar{\chi}$
(e) 力境界条件：$P = EAw'$ ，$M_z = GK\chi'$

梁要素のGM(Ⅱ)マトリックスは要素の中点を原点にとり，任意点ｚでの状態ベクトルを $\mathbf{S}$ とすれば次式で与えられる．

$$\mathbf{S}^{\mathbf{T}} = \lfloor \mathbf{d}^{\mathbf{T}}, \mathbf{f}^{\mathbf{T}} \rfloor \tag{5}$$

$\mathbf{d}$, $\mathbf{f}$ は梁の原点における変位 $\mathbf{d}_0$,部材力 $\mathbf{f}_0$ をパラメータとして表わすことができる．(式(3))

$$\left.\begin{aligned} \lfloor \mathbf{d}_0 \rfloor &= \lfloor u_0, v_0, w_0, \theta_0, \phi_0, \chi_0 \rfloor \\ \lfloor \mathbf{f}_0 \rfloor &= \lfloor V_{x0}, V_{y0}, P_0, M_{x0}, M_{y0}, M_{z0} \rfloor \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ここに $\theta = -u'$, $\phi = u'$である．

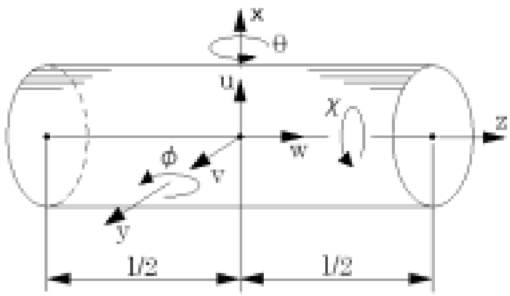

図1　梁要素と関連する座標系の定義

これは丁度従来の有限要素法で定義される要素の剛性マトリックス $\mathbf{f} = \mathbf{ku}$ 及び $\mathbf{u} = \mathbf{cf}$ を加え合わせて構成されるマトリックスで本解析法では新しく梁要素の特性マトリックス(characteristic matrix)と命名し，それを用いてマトリックス解析法を構成しようとするのである．

さて骨組構造解析の場合各梁又は柱要素の状態ベクトル式は上記で定義した梁要素の特性マトリックスを用いて厳密解の形で与えられる(勿論その要素原点の状態ベクトル $\mathbf{S}$ は未知である)．故に骨組構造解析とはそれを構成する全ての梁要素の未知状態ベクトル($u, v, w, \theta, \phi, \chi, V_x, V_y, P, M_x, M_y, M_z$)を骨組全体の節点(大部分が内部節点，一部が境界節点)で変位連続条件及び力平衡条件式を満足し,外部境界条件を充たす解を求める事になる．

ところが外部境界節点を持つ要素について考えてみると，境界で変位又は応力かのどちらかあるいは両方が規定されているのであるから，これらの外部境界条件を導入すれば変位規定境界条件の方から一部境界節点力に関する条件式として平衡方程式の方に追加されることになる．一方変位の連続条件式は変位 $\mathbf{d}$ と力 $\mathbf{f}$ の両方を含んだ式となっており，その境界点で $\mathbf{d}$ 又は $\mathbf{f}$ の一部が規定され若干その自由度が低くなる．

この様に問題に課せられた全ての外部境界条件を導入して骨組全体のマトリックス方程式を再編成すると結局次の様なマトリックス方程式が必ず得られる．

$$\underset{\overset{\parallel}{\mathbf{C}}}{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{dd} & \mathbf{C}_{df} \\ 0 & \mathbf{C}_{ff} \end{bmatrix}} \underset{\overset{\parallel}{\mathbf{S}}}{\begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix}} = \underset{\overset{\parallel}{\mathbf{T}}}{\begin{Bmatrix} \mathbf{T}_d \\ \mathbf{T}_f \end{Bmatrix}} \tag{7}$$

式(7)から部材力解 $\mathbf{f}$,変位解 $\mathbf{d}$ が容易に求められる．

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}_{ff}^{-1} \mathbf{T}_f \tag{8}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}_{dd}^{-1} (\mathbf{T}_d - \mathbf{C}_{df} \mathbf{C}_{ff}^{-1} \mathbf{T}_f) \tag{9}$$

3．GM(Ⅱ)立体骨組要素と全体方程式

図1の骨組要素を参照して，x,ｙ軸回りの曲げ変形およびｚ軸方向変形，z軸回りの捩り変形に対応する変位と力は要素座標系で次式で与えられる．

$$
\left.
\begin{aligned}
&u(z)=u_0+\phi_0 z+\frac{M_{y0}}{2EI_y}z^2-\frac{V_{x0}}{6EI_y}z^3+u_p(z)\\
&v(z)=v_0-\theta_0 z-\frac{M_{x0}}{2EI_x}z^2+\frac{V_{y0}}{6EI_x}z^3+u_p(z)\\
&w(z)=w_0+\frac{P_0}{EA}z+w_p(z)\\
&\theta(z)=-v'(z)=\theta_0+\frac{M_{x0}}{EI_x}z-\frac{V_{y0}}{2EI_x}z^2+u_{p0}(z)\\
&\phi(z)=u'(z)=\phi_0+\frac{M_{y0}}{EI_y}z-\frac{V_{x0}}{2EI_y}z^2+\phi_{p0}(z)\\
&\chi(z)=\chi_0+\frac{M_{z0}}{GK}z+\chi_{p0}(z)\\
&V_x(z)=-EI_y u'''(z)=-V_{x0}-V_{xp0}\\
&V_y(z)=EI_x v'''(z)=V_{y0}+V_{yp0}\\
&P(z)=EAw'(z)=P_0+P_{p0}\\
&M_x(z)=-EI_x v''(z)=M_{x0}-V_{y0}z+M_{xp0}(z)\\
&M_y(z)=EI_y u''(z)=M_{y0}-V_{x0}z+M_{yp0}(z)\\
&M_z(z)=GK\chi'(z)=M_{z0}+M_{zp0}(z)
\end{aligned}
\right\}\quad(10)
$$

ここで下添字のpは特解に対するものである．

要素(i)と(j)で共有される節点ｋ(内部節点)では変位連続式と力の平衡式として次式が成り立つ．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathbf{T}_i\mathbf{d}_k^{(i)}-\mathbf{T}_i\mathbf{d}_k^{(i)}=0\\
&\mathbf{T}_i\mathbf{f}_k^{(i)}+\mathbf{T}_i\mathbf{f}_k^{(i)}=0
\end{aligned}
\right\}\quad(11)
$$

変位又は外力の境界条件が与えられる要素(i)の節点ｋでの各対応する自由度では次式が成り立つ．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{変位境界：}\ \mathbf{T}_i\mathbf{d}_k^{(i)}=\overline{\mathbf{d}}_k\\
\text{又は}\quad&\text{荷重境界：}\ \mathbf{T}_i\mathbf{f}_k^{(i)}=\overline{\mathbf{F}}_k
\end{aligned}
\right\}\quad(12)
$$

ここで $\mathbf{T}_i$ は要素(i)の座標変換マトリックスである．

これらの式を全体方程式として組み立て，若干の変数・式の並べ替えを施せば，式(7)の様に表わすことが出来る．

4．計算例

（1）自由端に集中荷重をうける片持ち梁

図3に示す2要素よりなる片持ち梁を考える．

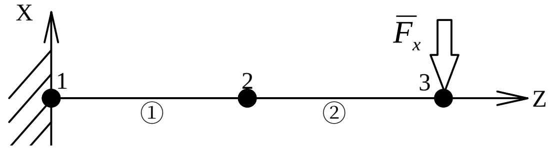

図3　Z-X平面内における片持ち梁

今，u_p=0である．要素①の節点1(固定端)ではZ=-l/2とおいて，固定条件 $u=0$, $u'=0$ から次式が導かれる．

$$
\left.
\begin{aligned}
&u\left(-\frac{l}{2}\right)=u_0-\frac{l}{2}\phi+\frac{l^2}{8EI_y}M_{y0}+\frac{l^3}{48EI_y}V_{x0}=0\\
&\phi\left(-\frac{l}{2}\right)=\phi_0-\frac{l}{2EI_y}M_{y0}-\frac{l^2}{8EI_y}V_{x0}=0
\end{aligned}
\right\}(13)
$$

これから ϕ_0 , u_0 について解けば次式となる．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\phi_0=\frac{l}{2EI_y}M_{y0}+\frac{l^2}{8EI_y}V_{x0}\\
&u_0=\frac{l^2}{8EI_y}M_{y0}+\frac{l^3}{24EI_y}V_{x0}
\end{aligned}
\right\}(14)
$$

要素①については M_{y0}, V_{x0} が未知数で u_0 , ϕ_0 は従属変数である．節点2においては u と ϕ の変位連続条件として式(14)を考慮して式(15)が，力の平衡条件として式(16)が必要である．ここで上添字は要素番号を表わす．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{l^2}{2EI_y}M_{y0}^{(1)}+\frac{l^3}{12EI_y}V_{x0}^{(1)}\\
&\quad-\left(u_0^{(2)}-\frac{l}{2}\phi_0^{(2)}+\frac{l^2}{8EI_y}M_{y0}^{(2)}+\frac{l^3}{48EI_y}V_{x0}^{(2)}\right)=0\\
&\frac{l}{EI_y}M_{y0}^{(1)}-\left(\phi_0^{(2)}-\frac{l}{2EI_y}M_{y0}^{(2)}-\frac{l^2}{8EI_y}V_{x0}^{(2)}\right)=0
\end{aligned}
\right\}(15)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&M_{y0}^{(1)}+\frac{l}{2}V_{x0}^{(1)}+M_{y0}^{(2)}+\frac{l}{2}V_{x0}^{(2)}=0\\
&V_0^{(1)}+V_0^{(2)}=0
\end{aligned}
\right\}(16)
$$

節点3では荷重端であるので次式が成り立つ．

$$
\left.
\begin{aligned}
&M_{y0}^{(2)}-\frac{l}{2}V_{x0}^{(2)}=0\\
&V_{x0}^{(2)}=\overline{F}_x
\end{aligned}
\right\}(17)
$$

式(15)～(17)をマトリックス表示すれば式(18)となる．

式(18)を式(7)の様に変位,力の順に並べ直せば式(8)によって部材力が求められ, 続いて式(9)により変位が求まる．

$$
\begin{bmatrix}
\frac{l^3}{12EI_y} & \frac{l^2}{2EI_y} & -1 & \frac{l}{2} & -\frac{l^3}{48EI_y} & -\frac{l^2}{8EI_y} \\
0 & \frac{l}{EI_y} & 0 & -1 & \frac{l^2}{8EI_y} & \frac{l}{2EI_y} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-\frac{l}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{l}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{2} & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} V_{x0}^{(1)} \\ M_{y0}^{(1)} \\ u_0^{(2)} \\ \phi_0^{(2)} \\ V_{x0}^{(2)} \\ M_{y0}^{(2)} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \overline{F}_x \\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{18}
$$

（２）**門型ラーメン**

図4に示す3要素よりなる門型ラーメンを考える.

節点1は固定端であるので，前記(１)と同様に要素①では未知数は部材力だけとなり, 式(14)が成り立つ. ここで, 軸方向の剛性は曲げに対して大であるので，工学的考察により省略する.

要素(1)の節点2では，式(14)と式(10)の対応する式を用いて次式が成り立つ.

$$
\left.
\begin{aligned}
u_2^{(1)} &= \frac{l^3}{12EI_y} V_{x0} + \frac{l^2}{2EI_y} M_{y0}^{(1)} \\
\phi_2^{(1)} &= \frac{l}{EI_y} M_{y0}^{(1)}
\end{aligned}
\right\} \tag{19}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
V_2^{(1)} &= V_{x0}^{(1)} = \overline{F}_x \\
M_2^{(1)} &= -\frac{l}{2} V_{x0}^{(1)} + M_{y0}^{(1)}
\end{aligned}
\right\} \tag{20}
$$

要素(2)の節点2,3では工学的考察から $u_2^{(2)} = u_3^{(2)} = 0$ と考えることが出来，これから次式が得られる.

$$
u_0^{(2)} = -\frac{l}{4EI_y} M_{y0}^{(2)} \tag{21}
$$

他の方程式については式(10)の対応する式から, 次式が得られる.

$$
\left.
\begin{aligned}
\phi_2^{(2)} &= \phi_0^{(2)} - \frac{l^2}{8EI_y} V_{x0}^{(2)} - \frac{l}{2EI_y} M_{yo}^{(2)} \\
V_2^{(2)} &= V_{x0}^{(2)} \\
M_2^{(2)} &= \frac{l}{2} V_{x0}^{(2)} + M_{y0}^{(2)} \\
\phi_3^{(2)} &= \phi_0^{(2)} - \frac{l^2}{8EI_y} V_{x0}^{(2)} + \frac{l}{2EI_y} M_{yo}^{(2)} \\
V_3^{(2)} &= V_{x0}^{(2)} \\
M_3^{(2)} &= -\frac{l}{2} V_{x0}^{(2)} + M_{y0}^{(2)}
\end{aligned}
\right\} \tag{22}
$$

要素(3)の節点3では完全固定なので節点1と同様の考察により次式が成り立つ.

$$
\left.
\begin{aligned}
u_3^{(3)} &= -\frac{l^3}{12EI_y} V_{x0}^{(3)} + \frac{l^2}{2EI_y} M_{yo}^{(3)} \\
\phi_3^{(3)} &= -\frac{l}{EI_y} M_{y0}^{(3)}
\end{aligned}
\right\} \tag{23}
$$

以上の考察から，この場合には未知数は $\lfloor V_{x0}^{(1)}, M_{y0}^{(1)}, \phi_0^{(2)}, V_{x0}^{(2)}, M_{y0}^{(2)}, V_{x0}^{(3)}, M_{y0}^{(3)} \rfloor$ の7DOFとなり，式(20),(22)を用いて全体方程式は次式となる.

$$
\begin{bmatrix}
\frac{l^3}{12EI_y} & \frac{l^2}{2EI_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^3}{12EI_y} & -\frac{l^2}{2EI_y} \\
0 & \frac{l}{EI_y} & -1 & \frac{l^2}{8EI_y} & \frac{l}{2EI_y} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{l}{2} & 1 & 0 & \frac{l}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{l^2}{8EI_y} & \frac{l}{2EI_y} & 0 & \frac{l}{EI_y} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{l}{2} & 1 & \frac{l}{2} & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} V_{x0}^{(1)} \\ M_{y0}^{(1)} \\ \phi_0^{(2)} \\ V_{x0}^{(2)} \\ M_{y0}^{(2)} \\ V_{x0}^{(3)} \\ M_{y0}^{(3)} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{F}_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{24}
$$

上式は適当な変数･式の並べ替えによって式(7)の形式にすることができる.

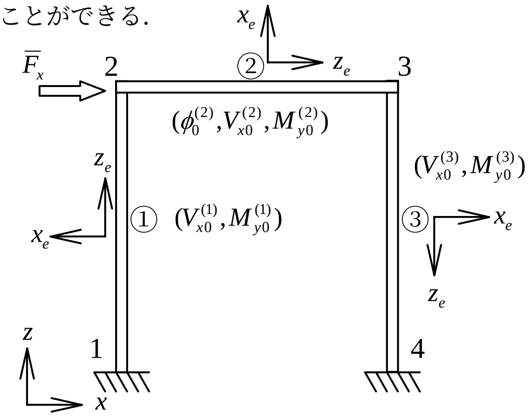

図4　門型ラーメン

数値計算例は発表時に報告する.

5.　まとめ

現在標準化されている有限要素法において，梁要素はその剛性マトリックス，撓性マトリックスが厳密に得られる唯一の要素である．この点に着目すると，混合法を用いれば任意の骨組構造解析を厳密に実行出来る事が分った．またこの方法によれば不静定力を導入することなく問題が解ける事が分った.

また本法は，川井の統一エネルギー原理によって分類すれば”GM(Ⅱ)要素”ということが出来る．これを2,3次元に拡張すれば，2,3次元連続体での厳密解要素GM(Ⅱ)の開発が可能であるが、不静定力の導入が必要となる．2,3次元GM(Ⅱ)要素の開発は今後の課題としたい.

参考文献

1)例えばJ.S.シェムニスキー：マトリックス構造解析の基礎理論,培風館,pp.177－210,1971

2) Tadahiko Kawai, Development of a Nodeless and Consistent Finite Element Method - Force Method forever -, 5thWCCM, 2002