統一エネルギー原理研究に関する二、三の話題

川井忠彦
東京大学名誉教授、PhD, Dr.Engng., Professor Emeritus, the University of Tokyo
（株）川井総合研究所 代表取締役社長
(〒102-0073　千代田区九段北3-3-9 法政大学 新一口坂校舎6F NO.2ブース,
keisan-tk@garnet.dti.ne.jp

1. 何故統一エネルギー原理か?

- 計算力学の牽引 ：有限要素法(FEM)と差分法(FDM)

NASTRAN開発では、変位法(DM)と応力法(FM)が主導権を争い。
FMは敗退、DMは改名してFEMの世界を実現。

- 思わぬ壁 ：剛体変位の処理や応力計算精度の問題

混合法開発への関心

・1950年　　Reissnerの原理

・1955年3月　中国の胡と日本の鷲津のHu-Washizuの原理

\- *しかし、その研究開発は閉塞状態が続いている。*

1.1 Reissner原理の変形

$$\Pi_R\left(u_i,\sigma_{ij}\right)=\Pi_p\left(u_i,\bar{\sigma}_{ij}\right)-\Pi_c\left(\bar{u}_i,\sigma_{ij}\right) \qquad (1\text{-a})$$

where

$$\Pi_p\left(u_i,\bar{\sigma}_{ij}\right)=\int_V A\left(\varepsilon_{ij}\right)dV-\int_V \bar{P}_i u_i dV-\int_S \bar{t}_i u_i dS \qquad (1\text{-b})$$

$$\Pi_c\left(\bar{u}_i,\sigma_{ij}\right)=\int_V B\left(\sigma_{ij}\right)dV-\int_V u_i\delta\sigma_{ij,j}dV-\int_S \bar{u}_i t_i dS \qquad (1\text{-c})$$

(1−b),(1−c)式はポテンシャルエネルギー関数$\Pi_p\left(u_i,\bar{\sigma}_{ij}\right)$と

補ポテンシャルエネルギー関数$\Pi_c\left(\bar{u}_i,\sigma_{ij}\right)$である。

即ち、$\Pi_R\left(u_i,\sigma_{ij}\right)$の中で$\Pi_p\left(u_i,\bar{\sigma}_{ij}\right)$は$\Pi_c\left(\bar{u}_i,\sigma_{ij}\right)$と拮抗している。

従って、Reissnerの原理では、その停留解(stationary solution)しか得られていない。

1.2 新しい極値原理

統一エネルギー原理（**unified energy principle**）

全エネルギー汎関数(total energy functional)

$$\Pi_t\left(u_i,\sigma_{ij}\right)=\Pi_p\left(u_i,\bar{\sigma}_{ij}\right)+\Pi_c\left(\bar{u}_i,\sigma_{ij}\right) \quad \text{(w, r, t. } u_i \,\&\, \sigma_{ij}) \tag{2}$$

(2)式の状態ベクトル $\mathrm{S}\left(u_i,\sigma_{ij}\right)$に関する第一変分をとる。

$$\delta\Pi_t\left(u_i,\sigma_{ij}\right)=\frac{\partial\Pi_p}{\partial u_i}\left(u_i,\bar{\sigma}_{ij}\right)\delta u_i+\frac{\Pi_c}{\partial\sigma_{ij}}\left(\bar{u}_i,\sigma_{ij}\right)\delta\sigma_{ij}=0 \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Pi_t}{\partial u_i}&=\frac{\partial\Pi_p}{\partial u_i}\left(u_i,\bar{\sigma}_{ij}\right)=0 \quad : \quad C_{dd}d+C_{df}f=T_d\\
\frac{\partial\Pi_t}{\partial\sigma_{ij}}&=\frac{\partial\Pi_c}{\partial\sigma_{ij}}\left(\bar{u}_i,\sigma_{ij}\right)=0 \quad : \quad C_{fd}d+C_{ff}f=T_d
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(3)式は**モーペルテュイ**の最小作用の原理（1744年、P. L. M. Maupertuisに**よって考案**）と呼ばれている。

1.3 混合有限要素法の原点

(4)式をマトリクス方程式で表わすと(5)式となり、その解は（6）式となる。

$$[C]\{S\} = \{T\} \qquad (5)$$

$$\begin{bmatrix} C_{dd} & C_{df} \\ C_{fd} & C_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_d \\ T_f \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{S} = \mathrm{C}^{-1} T \qquad (6)$$

骨組構造解析では、複雑な不静定構造であっても問題なく解くことができる。

一方、連続体構造物では、使用する有限要素は近似モデルであり、また領域分割の方法は無限にある。この解決法として、要素境界上で要素状態ベクトル(u_i,t_i)の連続性保持点を選択的に殖やせる無節点要素（nodeless element）を用いれば、応力集中問題などの解析に威力を発揮するであろう。

２． Divergence Theorem

- 平衡方程式　：$\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i = 0 \quad in \ \mathrm{V} \qquad (7\text{-a})$
- 応力境界条件：$t_i = \sigma_{ij} n_j \qquad on \ \mathrm{S}_\sigma \qquad (7\text{-b})$
- 変位境界条件：$u_i = \bar{u}_i \qquad on \ \mathrm{S}_\mathrm{u} \qquad (7\text{-c})$

(7-a,b,c)式を満足する状態ベクトル（u_i,t_i）に対するガウスの発散定理が成立する。

$$\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV = \int_V \bar{p}_i u_i dV + \int_{s_\sigma} \bar{t}_i u_i dS + \int_{s_u} \bar{u}_i t_i dS \qquad (8\text{-a})$$

今、この式の全ての項を左辺に移動し、$\Pi_t(u_i,\sigma_{ij})$ を表せば次式が得られる。

$$\Pi_t(u_i,\sigma_{ij}) = \int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV - \int_V \bar{p}_i u_i dV - \int_{s_\sigma} \bar{t}_i u_i dS - \int_{s_u} \bar{u}_i t_i dS \qquad (8\text{-b})$$

$$= \left(\int_V A(\varepsilon_{ij}) dV - \int_V \bar{p}_i u_i dV - \int_{s_\sigma} \bar{t}_i u_i dS \right) + \left(\int_V B(\sigma_{ij}) dV - \int_{s_u} \bar{u}_i t_i dS \right) = \Pi_p(u_i) + \Pi_c(\sigma_{ij}) \qquad (8\text{-c})$$

$$\therefore \Pi_t(u_i,\sigma_{ij}) = \Pi_p(u_i) + \Pi_c(\sigma_{ij})$$

2.1 Gauss発散定理まとめ

- 微小変形弾性論では微小歪みを仮定する。
この発散定理は応力-歪関係式の如何に拘らず成立する。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (9)$$

- (8)式で与えられるエネルギー保存則において変位、歪や応力の大小については条件がつけられていない。即ち、エネルギー保存則を満足する状態ベクトル$\mathbf{s}(\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\sigma}_{ij})$の解は唯一ではない。

- この事実は理工学の分野に限定しても極めて重大な意味をもつ。
工学設計において設計解が必ず満足しなければならない設計の許容域がこれによって決まり、あとは許容域内にある設計解のなかで設計の目的関数(例えば、最小重量/最小コスト)を与える解を探求する問題となる。

- 機械工学の諸分野では各種の自動制御(**automatic control**)技術の開発が要求されるが、この様な問題の解析にも統一エネルギー原理が関係する。

3．歪エネルギー$A(\varepsilon_{ij})$　と補歪エネルギー$B(\sigma_{ij})$

◆応力歪関係式

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= f(\varepsilon_{ij}) \\ \varepsilon_{ij} &= g(\sigma_{ij}) \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

◆歪エネルギー関数A(ε ij)、B(σ ij)の存在と
正値関数(positive definite)条件の満足

$$\delta^2 A(\varepsilon_{ij}) \geq 0, \quad \delta^2 B(\sigma_{ij}) \geq 0 \qquad (11)$$

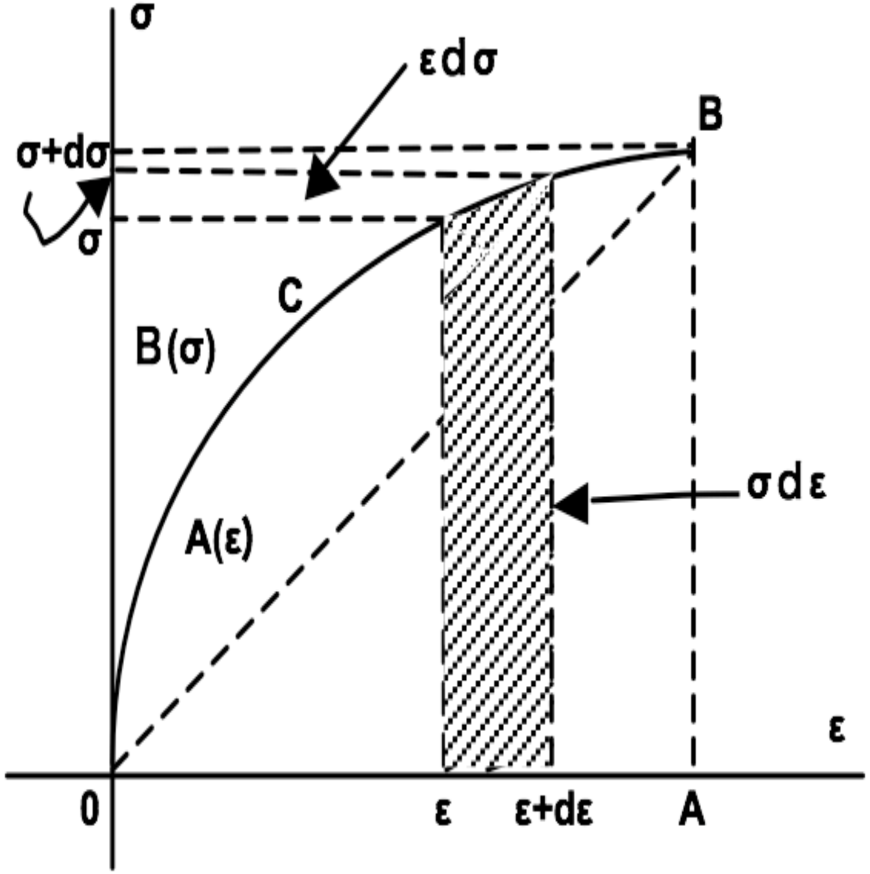
$$\mathrm{A}(\varepsilon_{ij}) = \int_C \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad \mathrm{B}(\sigma_{ij}) = \int_C \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \qquad (12)$$

A(ε ij)、B(σ ij) は応力ー歪空間に張られた平衡曲面で、その一般の場合は応力σ_{ij} ,歪ε_{ij} 夫々6成分 従って6+6=12次元位相空間で定義される。

これらは複雑な超曲面を表し、その可視化は不可能であるが、1次元問題の場合は次の図に示される。

1次元変形問題における応力-歪関係式

Feynman Diagram



$$\left.\begin{aligned} A(\varepsilon_{ij}) &= \int_C \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ B(\sigma_{ij}) &= \int_C \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

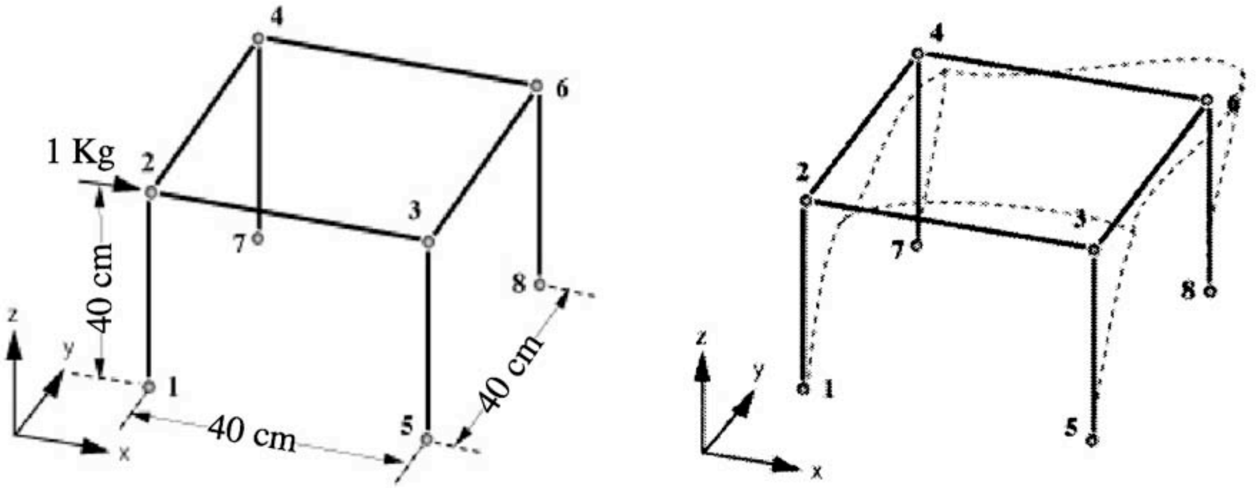
$$A(\varepsilon_{ij}) + B(\sigma_{ij}) = \sigma\varepsilon \quad (14)$$

$$A(\varepsilon_{ij}) = B(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \quad (15)$$

$$\therefore A(\varepsilon_{ij}) + B(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (16)$$

積分径路Cは与えられた材料の応力—歪空間上に画かれた平衡超曲面上において仮想する載荷径路を示す。

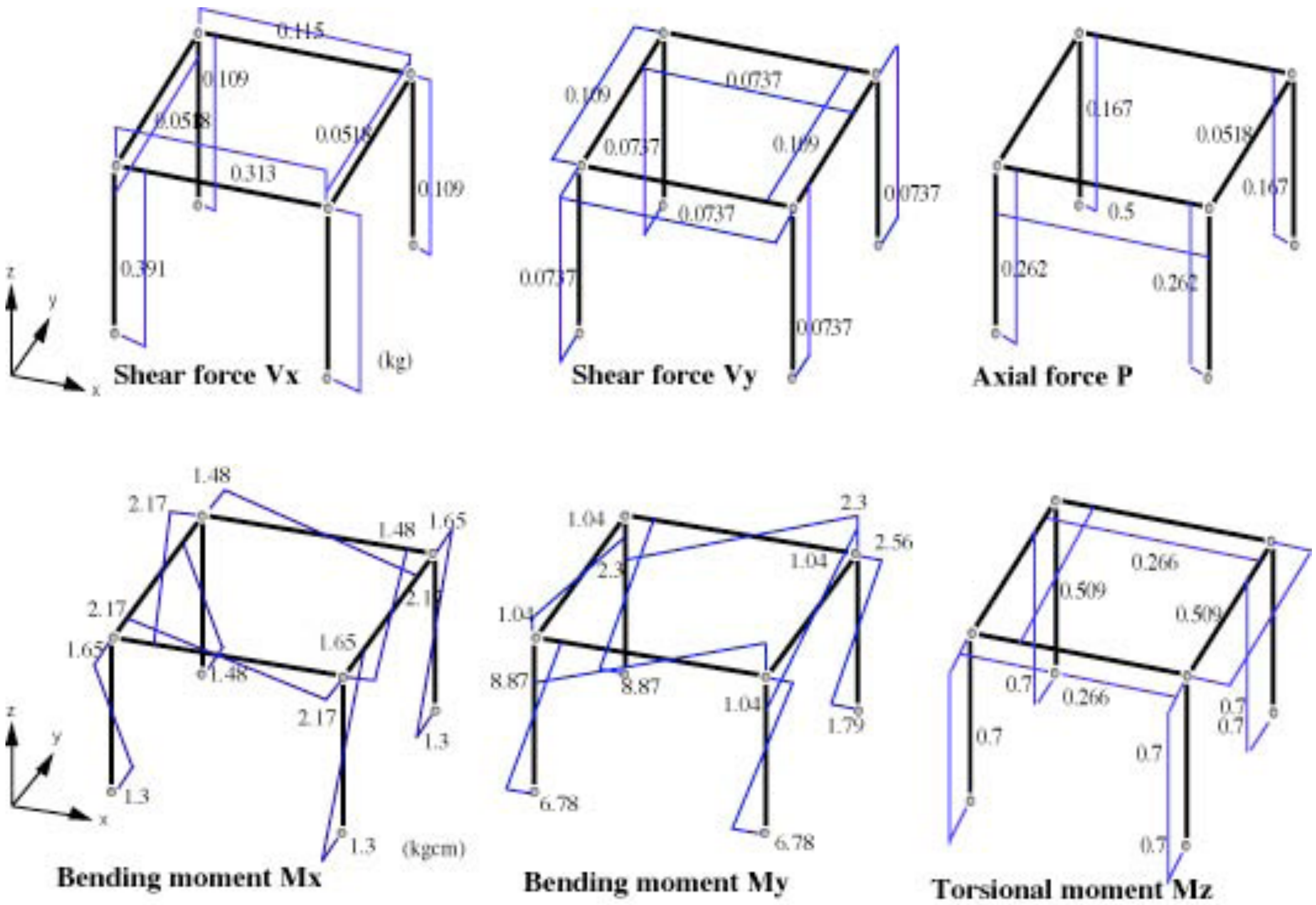
Deformation analysis of a Space frame subjected to a horizontal load



E=2100000kg/cm^2 A=0.50265 cm^2 I=0.020106 cm^4 K=0.040212 cm^4

(a) dimension, material constants (b) deformation pattern

Stress analysis of a simple space frame subjected to a horizontal thrust



4. 結論

- Gauss発散定理からエネルギー保存則の一般化

$$\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV = \int_V \bar{p}_i u_i dV + \int_{s_\sigma} \bar{t}_i u_i dS + \int_{s_u} \bar{u}_i t_i dS$$

- エネルギー保存則の成立
  状態ベクトルが応力平衡条件式、付帯変位と応力境界条件を満足し、
  歪 が微小であるならば応力ー歪関係式の如何に拘らず成立。
- 最適設計や自動制御理論等への適用
- 安定平衡状態の実現
  エネルギー汎関数が存在し、正値(positive definite)であれば
  安定平衡状態が実現する。
- 流体・電磁気学、各種熱・物質移動の領域までの展開
- 非平衡熱力学の一般化、実用化の研究展開
- 新しい連続体力学の変分原理の実現