図解による川井理論

統一エネルギー原理の入門

□□□□□□□□□□□□M□c

世の中で起こる現象は森羅万象、すべからく非線形である。

□2170781□76□□85□6

1939年12月27日、J.W.Gibbsの第15回記念講演でKármánは、これからの技術者の進むべき進路を「非線形問題である」とはっきり示唆した。

それから69年、コンピュータの驚異的な高速化・大容量化に相伴って、人類の非線形現象への挑戦が本格化して来た。

原子力、宇宙開発、情報革命、生命科学、ナノテクノロジー、そして複雑系等々、現在終わりのない非線形現象との戦いの真只中にある。

1. はじめに

CAE、そして計算工学の発展

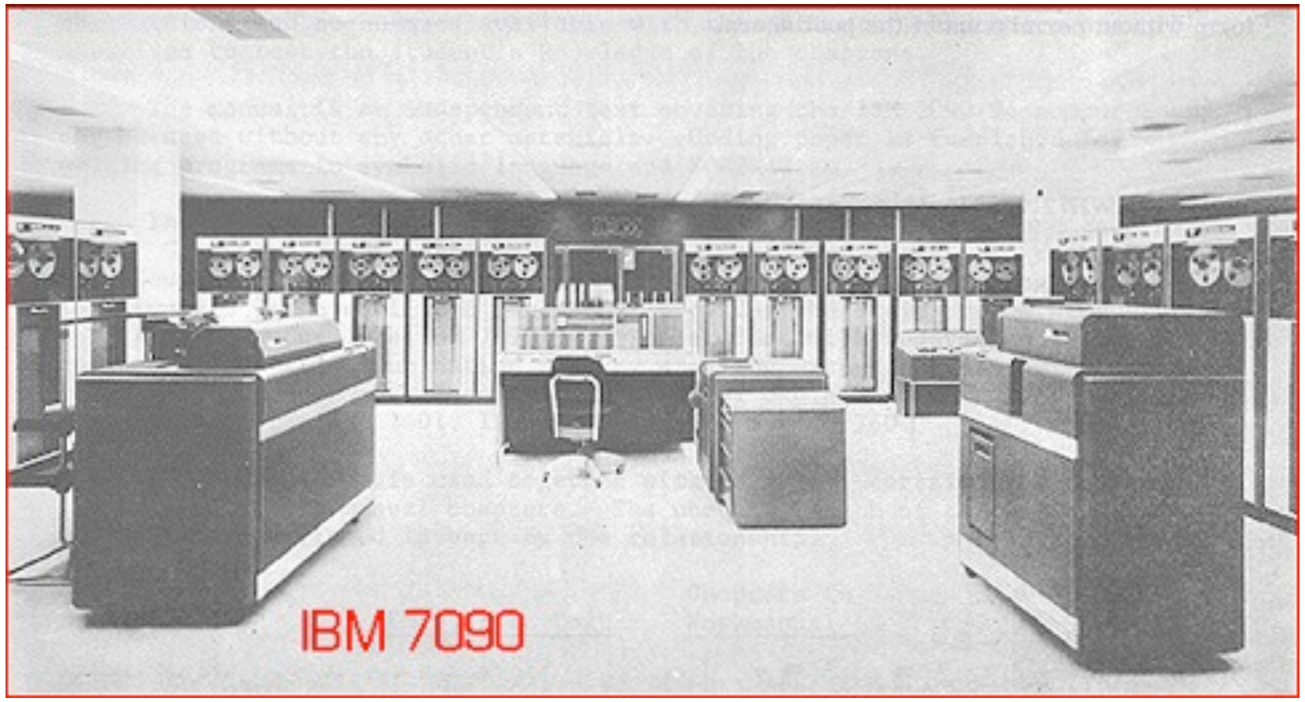
前世紀半ばに誕生した電子計算機と有限要素法の発展は目覚ましく、驚くべき早さで産業界のCAE（Computer Aided Engineering）化が進展された。

その主役は計算力学、計算科学であり、NASTRANをはじめとする数多くの汎用構造解析・設計システムが出現した。現在は初期設計から部品製造、組立・仕上げまで殆どコンピュータとロボットが行う生産自動化（Factory Automation）の時代となった。

この偉業は正しく計算力学（Computational Mechanics）と情報工学（IT：Information Technology）の見事な融合により達成されたことに間違いがない。

しかしながら、科学研究や技術開発には、終りがなく、たゆまざる基礎研究の推進と新技術の開発によってのみ、更なる発展が約束されるのである。

この半世紀に渡る有限要素法発展の歴史を振り返り、更なるチャレンジについて紹介した。

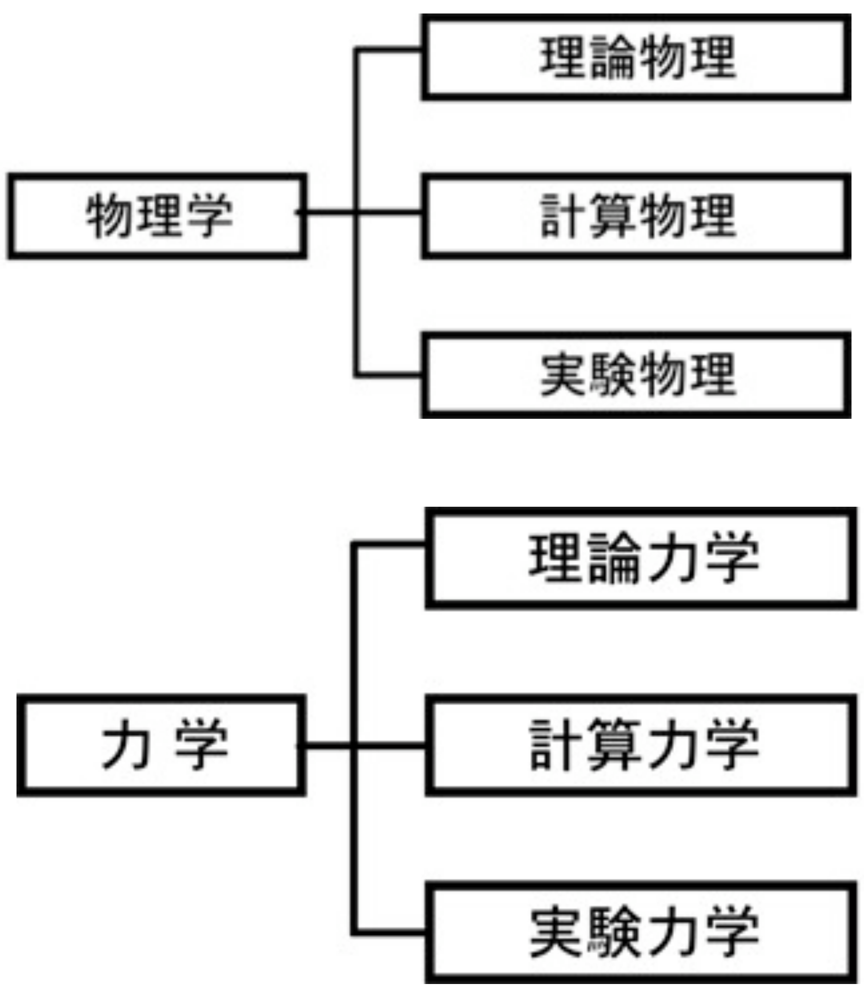


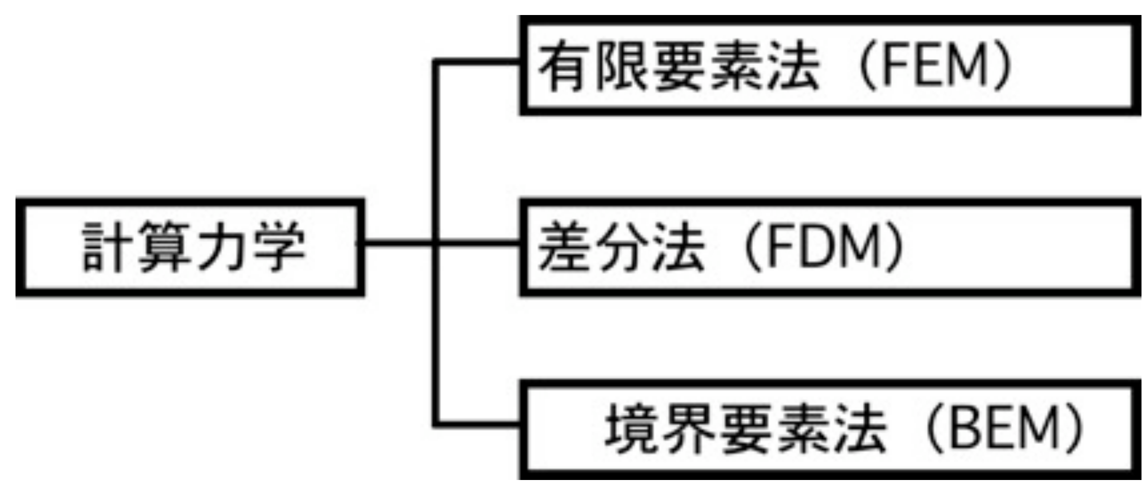
2. 計算工学、計算力学とは

計算力学として有限要素法など解析法が誕生

計算工学とは、計算力学（Computational Mechanics）を用いて工学における研究・開発・生産を行う新しい学問分野を言う。

計算力学は工学における第三の学問分野であり、従来の学問と次のように対比できる。





■計算力学を構成する3つの主要解法

3. 有限要素法の小史

有限要素法（Finite Element Method）の発展

有限要素法（FEM）はボーイング社の構造技術者により開発された。
1956年にアメリカ航空学会において発表され、大フィーバとなる。

- 1956　FEM 論文発表
- 1960　汎用構造解析プログラム開発と産業界への普及
- 1970　構造解析から非構造解析時代へ
- 1980　計算力学全盛時代：CAD/CAM、CAE、CIM時代の出現
- 1990　非線形現象の解明への挑戦
- 2000　統一エネルギ（川井）理論の発表

我が国における発展：日本鋼構造協会
造船ブーム→建設・自動車産業への普及

21世紀の課題　：ナノテクノロジー、バイオテクノロジ、
複雑系への挑戦、 CAE・FAの推進

4. 有限要素法の問題

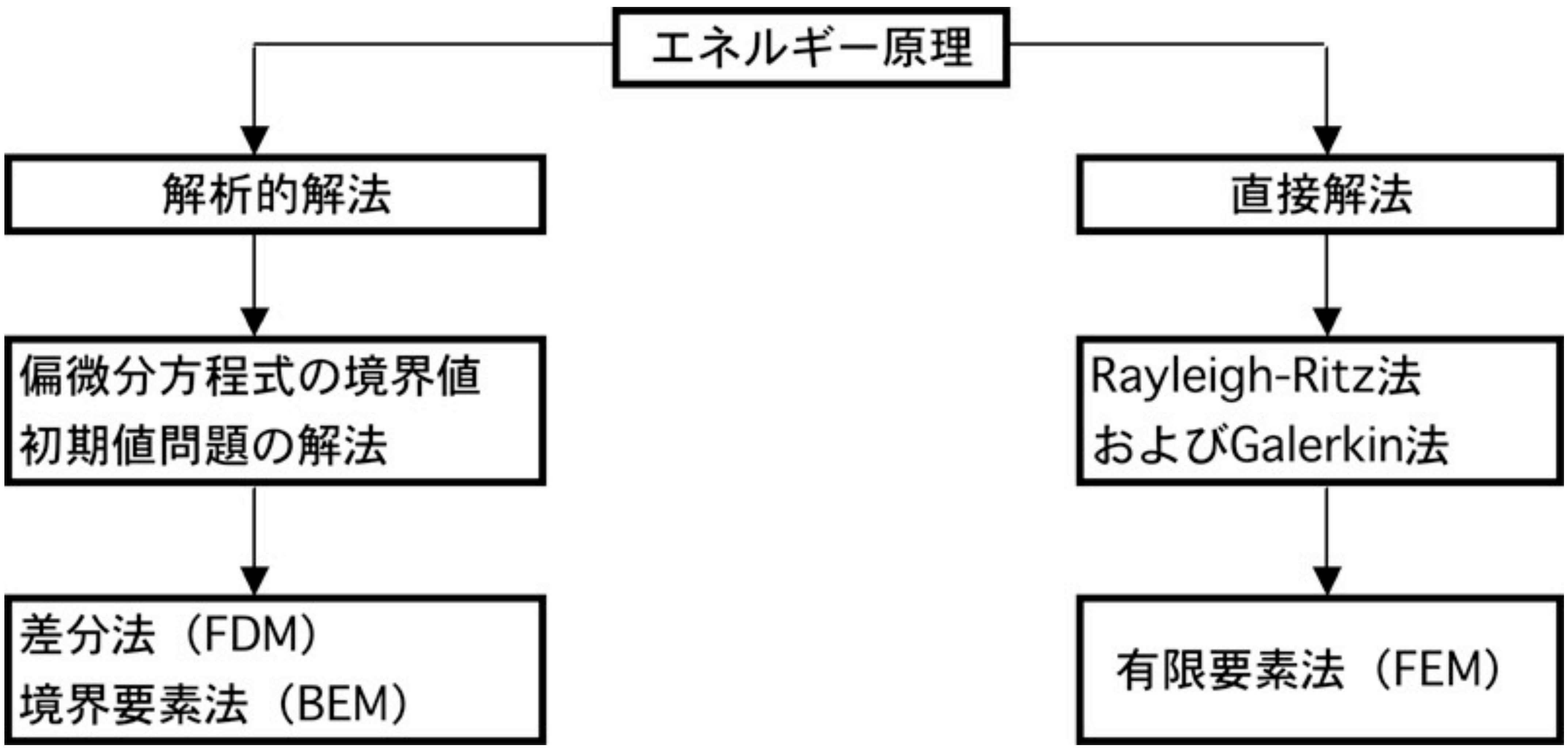
有限要素法発展の影

電子計算機が出現に前後し、マトリックス構造解析法（matrix method of structural analysis）が生まれ、電子計算機を用いた骨組構造解析が可能となった。

1956年米国ボーイング社のM.J.Turnerら率いる開発チームが前者の流れを踏む”直接剛性法（Direct Stiffness Method）と呼ぶ新構造解析法を発表。
この手法が「有限要素法（Finite Element Method、FEMと略記）」であり、差分法（Finite Difference Method、FDMと略記）と並び計算力学（Computational Mechanics）の主流を形成した。

有限要素解析法には、 変位を未知量にとる**変位法**（Displacement Method　以後DMと略記）と応力を未知量にとる**応力法**（Force Method、FMと略記）が存在し、互いに主導権争いをした。
DMは仮想仕事の原理を、FMは補仮想仕事の原理を基礎とし、前者の方法で近似解を求めると歪みエネルギーが正解より高めに算出され、よって変位や応力は低めの答えが得られる。一方、後者の方法に従うと歪みエネルギーは低めとなり、よって変位や応力は高めの評価が得られることが理論的に判っていた。
ところが開発競争に敗れた後者の方法は忽ち消滅してしまい、構造解析結果の信頼性を確認する方法は未完成のままCAE化が進行することになった。従って、近似解の精度を確認するためには、両者の方法で正解の存在範囲を挟み打ちする必要性がある（川井）。

5. 固体力学における変分原理

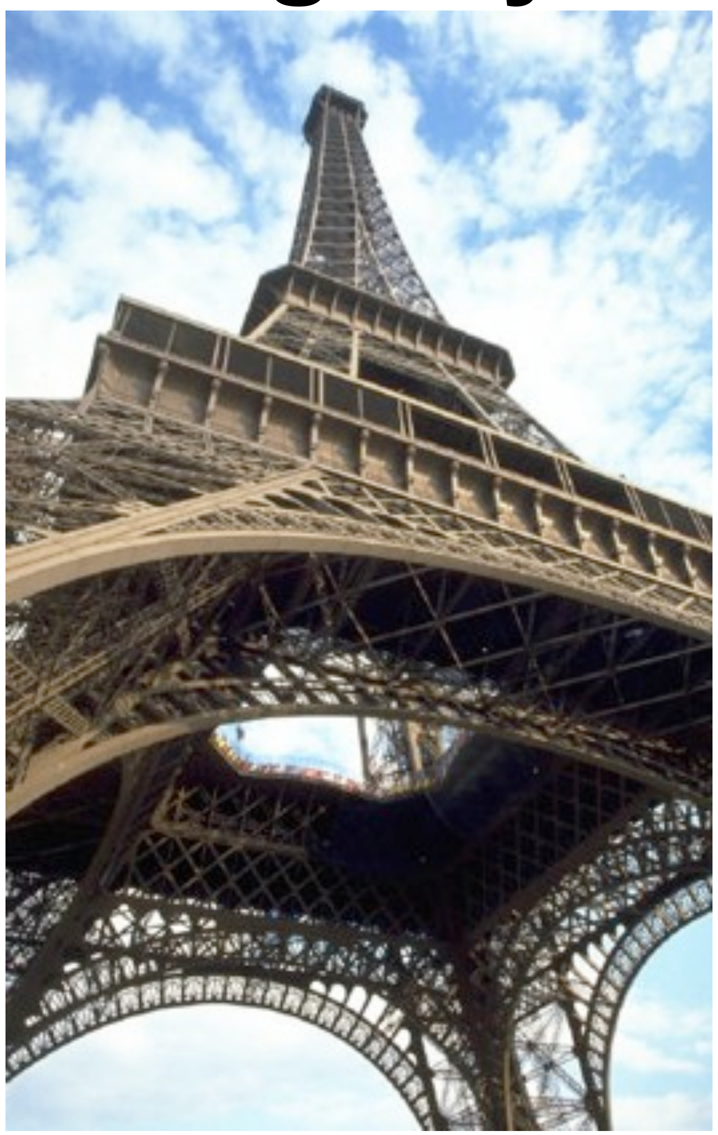


数学的方法　　　工学的方法

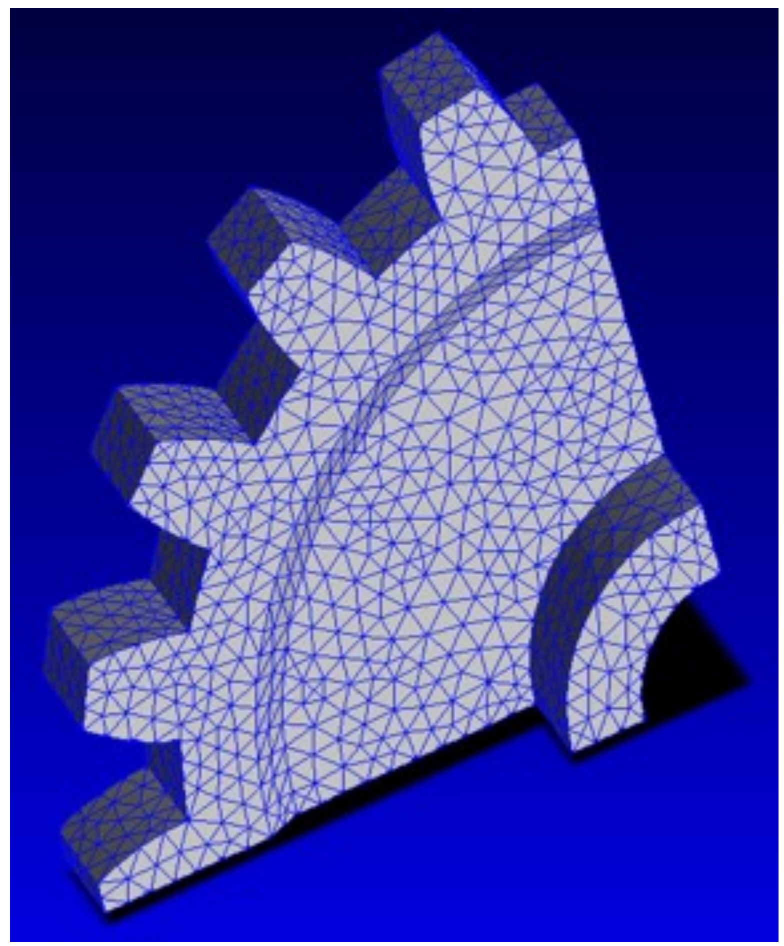
用語説明（後日）

□□□l□Mum□M□□

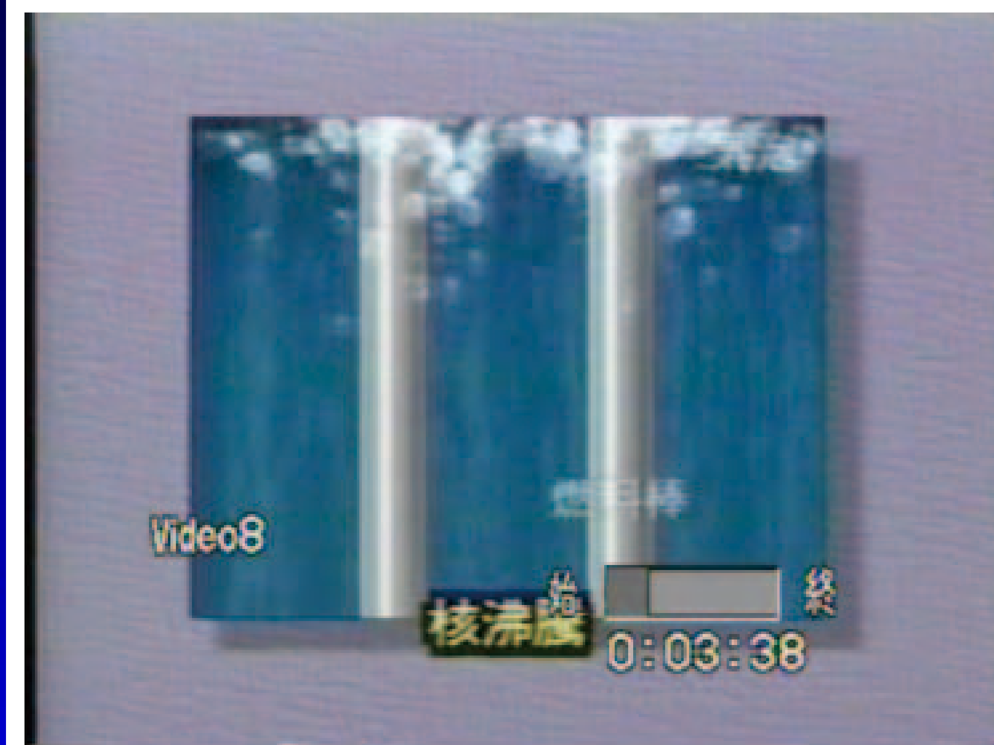
Design by rule → **Design by Analysis**



骨組構造解析



連続体構造解析



連成解析

Structure Analysis → **Multi-Physics Analysis** → ?

□□□□□□M□□□□

Hooke's law (From Wikipedia, the free encyclopedia)

In physics, **Hooke's law** of elasticity is an approximation that states that the amount by which a material body is deformed (the strain) is linearly related to the force causing the deformation (the stress). Materials for which Hooke's law is a useful approximation are known as linear-elastic or "Hookean" materials.

Hooke's law is named after the 17th century British physicist Robert Hooke. He first stated this law in 1676 as a Latin anagram, whose solution he published in 1678 as *Ut tensio, sic vis*, which means:

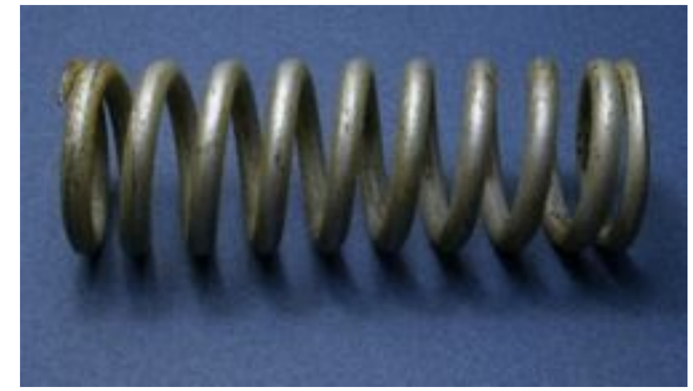
“As the extension, so the force”

For systems that obey Hooke's law, the extension produced is directly proportional to the load:

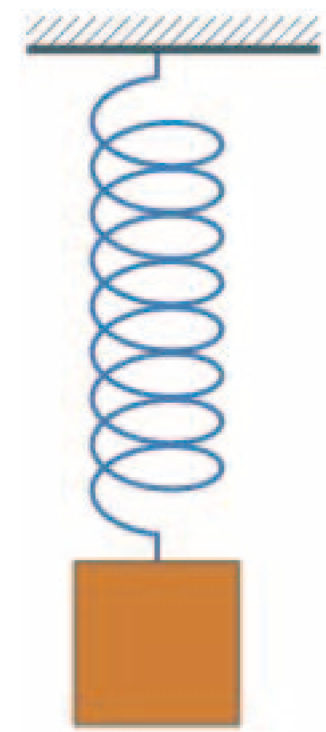
$$\vec{\mathbf{F}} = -k\vec{\mathbf{x}}$$

where

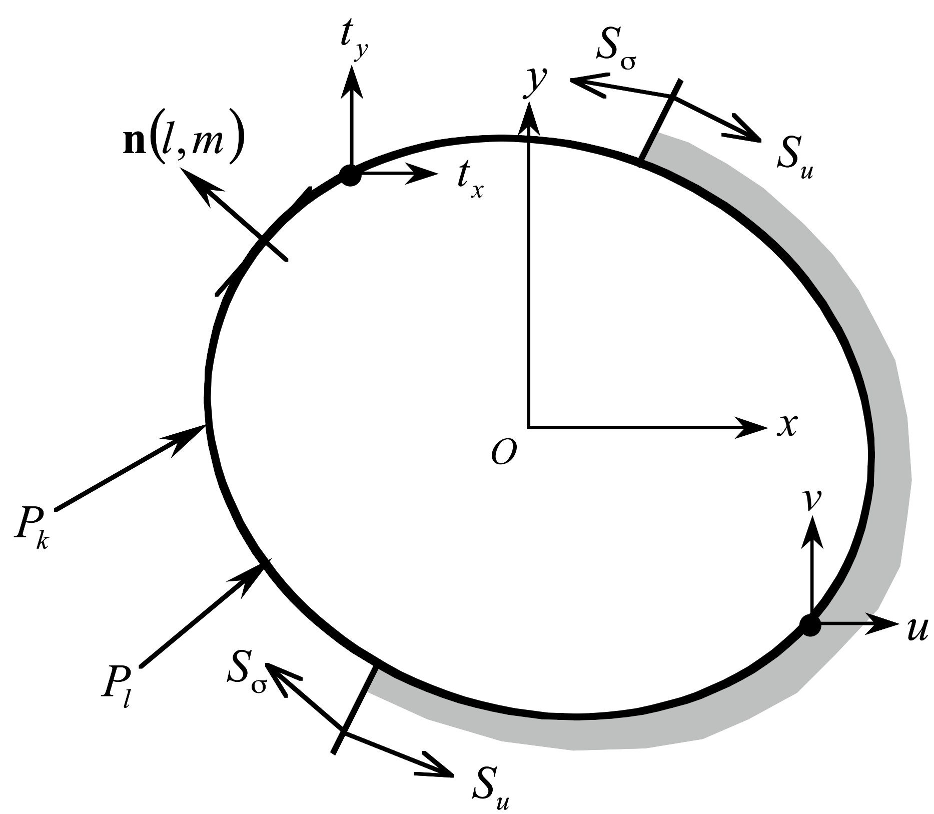
x is the distance that the spring has been stretched or compressed away from the equilibrium position, which is the position where the spring would naturally come to rest [usually in meters],
F is the restoring force exerted by the material [usually in newtons], and
k is the **force constant** (or **spring constant**). The constant has units of force per unit length (usually in newtons per meter).
When this holds, we say that the behavior is linear. If shown on a graph, the line should show a direct variation. There is a negative sign on the right hand side of the equation because the restoring force always acts in the opposite direction of the *x* displacement (when a spring is stretched to the left, it pulls back to the right).



Hooke's law accurately models the physical properties of common mechanical springs for small changes in length.



1676年　Robert Hook (1635-1703) が謎の形、ceiiinossttuvとして発表した。
1678年、これを Ut tensio sic vis, 即ち、「バネのような物体にかかる力は伸びに比例する」と説明した。



Equilibrium equation: $\sigma_{ij,j} + \bar{p}_i = 0$ in V

Displacement b.c.: $u_i = \bar{u}_i$ on S_u

Stress b.c.: $t_i = \bar{t}_i$ on S_σ

where

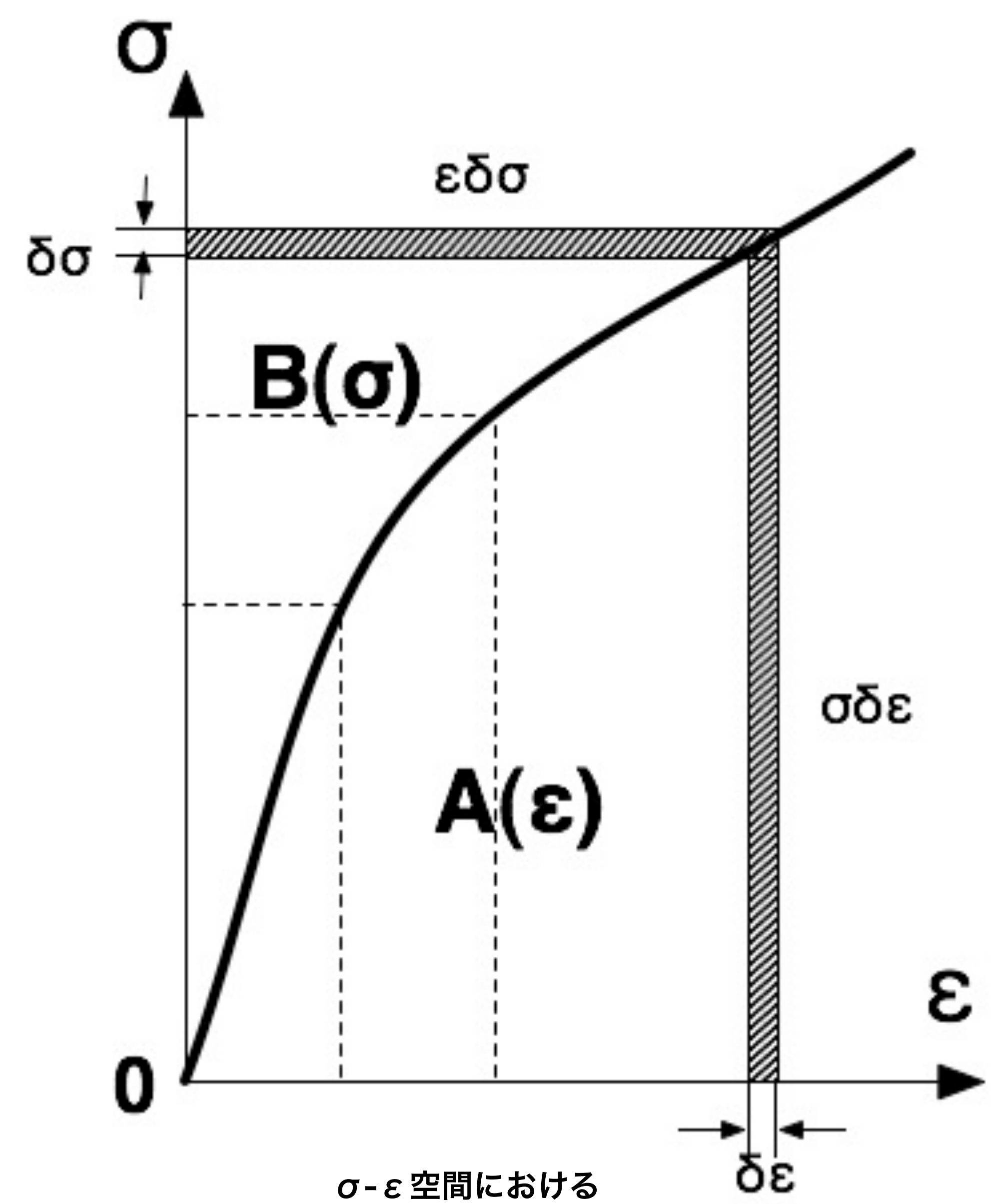
$t_i = \sigma_{ij} n_j$:displacement prescribed condition

$S = S_u + S_\sigma$:stress prescribed condition

9. 仮想仕事 vs. 補仮想仕事の原理

A(ε)はある荷重経路に沿った歪エネルギー積分を、
また、**B(σ)**は同じ荷重経路に沿った補歪エネルギー積分を表す。

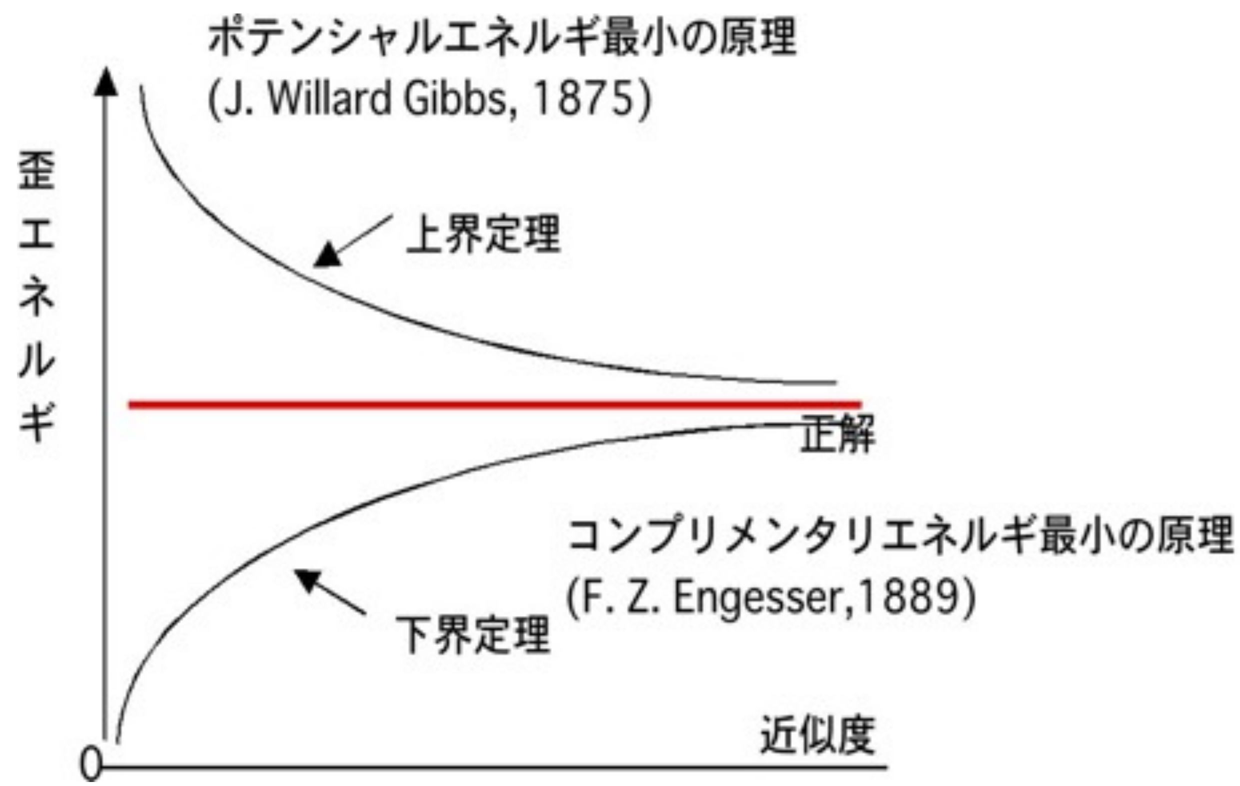
材料がHookeの法則に従えば、**A(ε)　=　B(σ)**　となる。

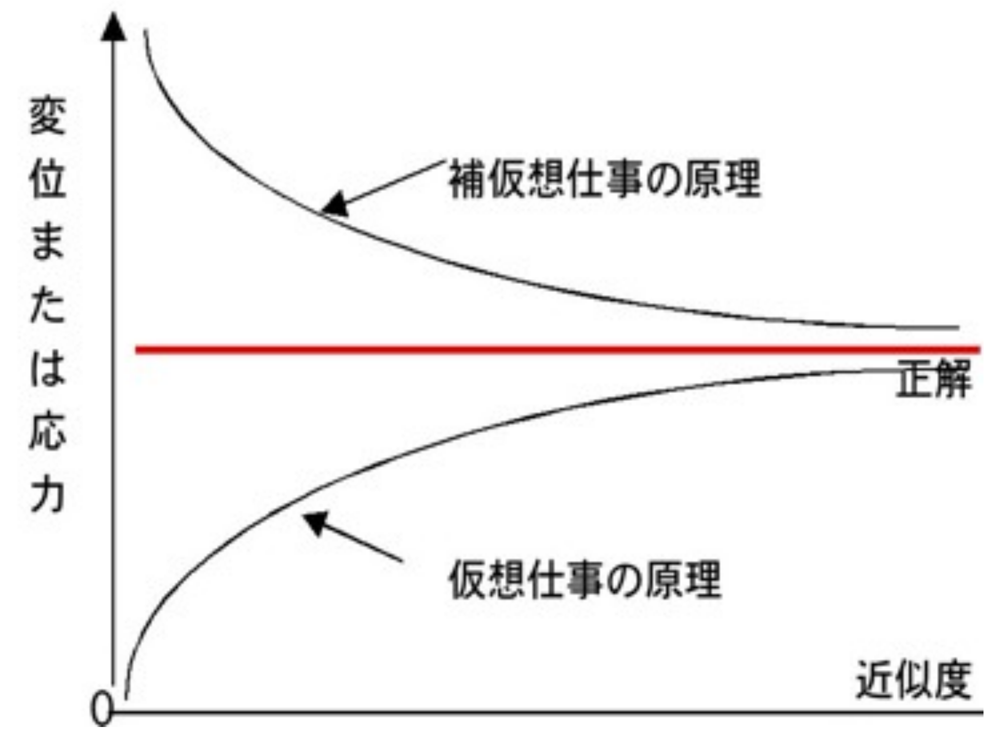


σ - ε 空間における
歪エネルギー積分A(ε)と補歪エネルギー積分B(σ)

10. エネルギー原理の理想像

仮想仕事と補仮想仕事の原理の共存





仮想仕事の原理と補仮想仕事の原理による固体力学諸問題の近似解法

近似度=要素自由度 x 要素数

統一エネルギー原理

統一エネルギー原理の紹介

統一エネルギー原理の本質

□□□統一エネルギー原理は混合変分原理

統一エネルギー原理は変位u_iを未知量にとる仮想仕事の原理と応力σ_{ij}を未知量にとる補仮想仕事の原理を統合した混合変分原理（mixed variational principle）である。

統一エネルギー原理 (w.r.t. u_i & σ_{ij})	=	仮想仕事の原理 (w.r.t. u_i)	+	補仮想仕事の原理 (w.r.t. σ_{ij})

この原理を用いて固体力学境界値問題を解析すると、固体の状態ベクトル（u_i, σ_{ij}）を決定する過程で仮想仕事の原理と補仮想仕事の原理の攻めぎ合いが起こり、近似度を進めて行き、自然に固体の状態ベクトル（u_i, σ_{ij}）は正解に収束する。

□□□Reissner原理と統一エネルギー原理の相違

Reissnerの原理はポテンシャル・エネルギー最小の原理の汎関数の中に変位境界条件にLagrangeの未定係数λ_iを導入してu_i、σ_{ij}およびλ_iに関する変分問題に一般化した。この際の荷重経路に沿ったコンプリメンタリ・エネルギー積分を次式とした。

$$\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i ds - \int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_i ds - \int_V(\sigma_{ij,j}-\bar{p}_i)\delta u_i dv = 0 \qquad \text{(A)}$$

これに対して統一エネルギー原理から導かれる変分式は次式となる。

$$\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i ds + \int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_i ds - \int_V(\sigma_{ij,j}-\bar{p}_i)\delta u_i dv = 0 \qquad \text{(B)}$$

(A)式と(B)式は符号だけが違っている。Reissnerの原理による近似解は停留解（stationary solution）であるのに対し、統一エネルギーの原理での近似解は**極値解**（extremum solution）である。

□□□統一エネルギー原理による上下界挟み打ち解法

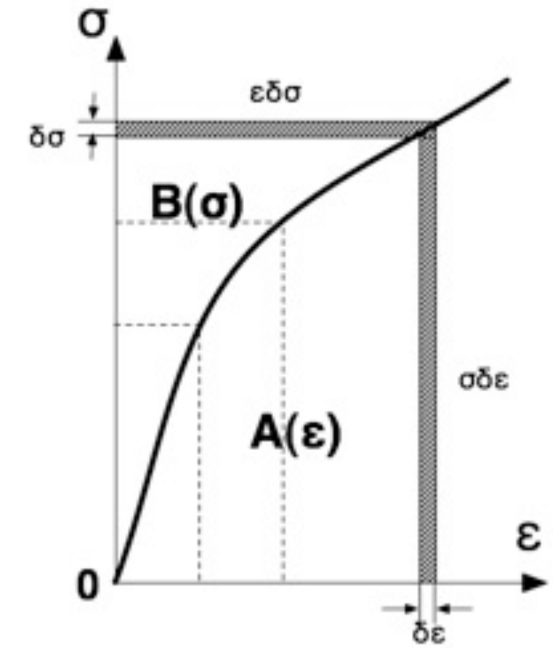
変位関数を用いて求められるエネルギー近似解は常に正解の上界（upper bound）を与え、自己平衡の要素試験関数を用いた場合は正解の下界（lower bound）を与える。この原理は応力-歪関係、歪の大きさに拘わらず成立する。換言すると非線形（大変形、非弾性）固体力学諸問題を上下界挟み打ちができる。

□□□□□se□□M□. □4. □836□□□

この新エネルギー原理から8種類の解法が誘導できる。有限要素解析で予め要素間の状態ベクトル（u_i, σ_{ij}）の連続性を満足するようにして解く６つの解法群（一般化有限要素法）とそうでない２つの解法群に大別できる。後者のグループはユニークな無節点解法（non collocation method）となる。

□□□□□M□□□

統一エネルギー原理は応力-歪関係や歪の大きさに拘わらず成立する。換言すると高度非線形問題（非弾性、有限変形問題）の解析に適用できる変分原理であるが、問題を解く鍵はその応力-歪関係式をどのように与えるかの問題である。統一エネルギー原理を実用化するためには、先ず対象とする固体の構成則あるいは応力-歪関係式が予め与えられる必要がある（右図 参照）。



材料構成則の問題は物理学の根本問題であり、近年は素粒子物理学の第一原理まで遡り、超高速・大容量電子計算機の力を借りて解明して行こうとする方法が脚光を浴びている。ところが1972年、物性物理学者のP. W. AndersonがScience誌（vol. 177, p.393）に「More is different」と題する論文を発表して、この考え方が誤りであることを明快に論じた。一般に科学は素粒子、原子核、固体等の凝集体、生物体質、生物等々その対象によって多くの階層に分かれ、それぞれの階層では境界付近を除いて独自の法則が物質なり、現象なりを支配する。
即ち、自然界は玉葱のような構造になっており、一皮毎に上の皮とその下の皮を結びつける構成則があり、一歩一歩、時間が掛るがその関係を追及し、その成果を積み重ねながらその芯（第一原理）に近づくべきであると思う。

統一エネルギー原理の特徴

（１）**統一エネルギー原理** － 強固な理論、信頼性向上

仮想仕事の原理と補仮想仕事の原理を統一したエネルギー原理。
状態ベクトル（u_i, σ_{ij}）を未知量として解析を行うと、その近似解は（u_i, σ_{ij}）の中で互いにエネルギーの攻めぎ合いを行い、自然に近似度を増して正解に収束する。

（２）**8種類の解法が誘導** － 用途に応じた解析の実現

この新エネルギー原理から8種類の解法が誘導できる。
要素間の状態ベクトル（u_i, σ_{ij}）の連続性を満足する６つの解法群（一般化有限要素法）と満足しない２つの解法群に大別できる。
この8つの解法より、用途に応じた解法を選択でき、効率的な解析が行える。
なお、後者のグループはユニークな無節点解法（non collocation method）となる。

（３）**上下界挟み打ち解法** － 解析解の保証

この原理は応力-歪関係、歪の大きさに拘わらず成立し、非線形（大変形、非弾性）固体力学諸問題を上下界挟み打ちができる実用的変分原理を提供する。

（４）**極値解の保証** － 安定した解析の実現

固体の状態ベクトル（u_i, σ_{ij}）を未知量とする変分原理は混合変分原理（mixed variational principle）と呼ばれ、1950年 E. Reissnerにより提案された。その後、1955年胡・鷲津により一般化され、有限要素法解析の羅針盤の役を務めた。しかし、これらの原理による近似解は停留解（stationary solution）であるのに対し、統一エネルギーの原理による近似解は極値解（extremum solution）である。

（５）**実用的な要素群の実現** － 境界での連続性

6つの解法（一般化有限要素法）では、要素境界辺または面上で流動座標系を定義し、その座標に関して状態ベクトルを展開する。遂次近似的連続性を保つ要素群を組織的に開発可能となる。この方法により状態ベクトルの連続性が合理的に保持され、板殻構造、三次元解析、固体接触問題解析や金属の転位（dislocation）表現に有効な要素群の開発が可能となる。また、この解法は流れ問題の有限要素解析の主流となっているEulerの方法にも一致する。

（６）**非線形解析への対応**

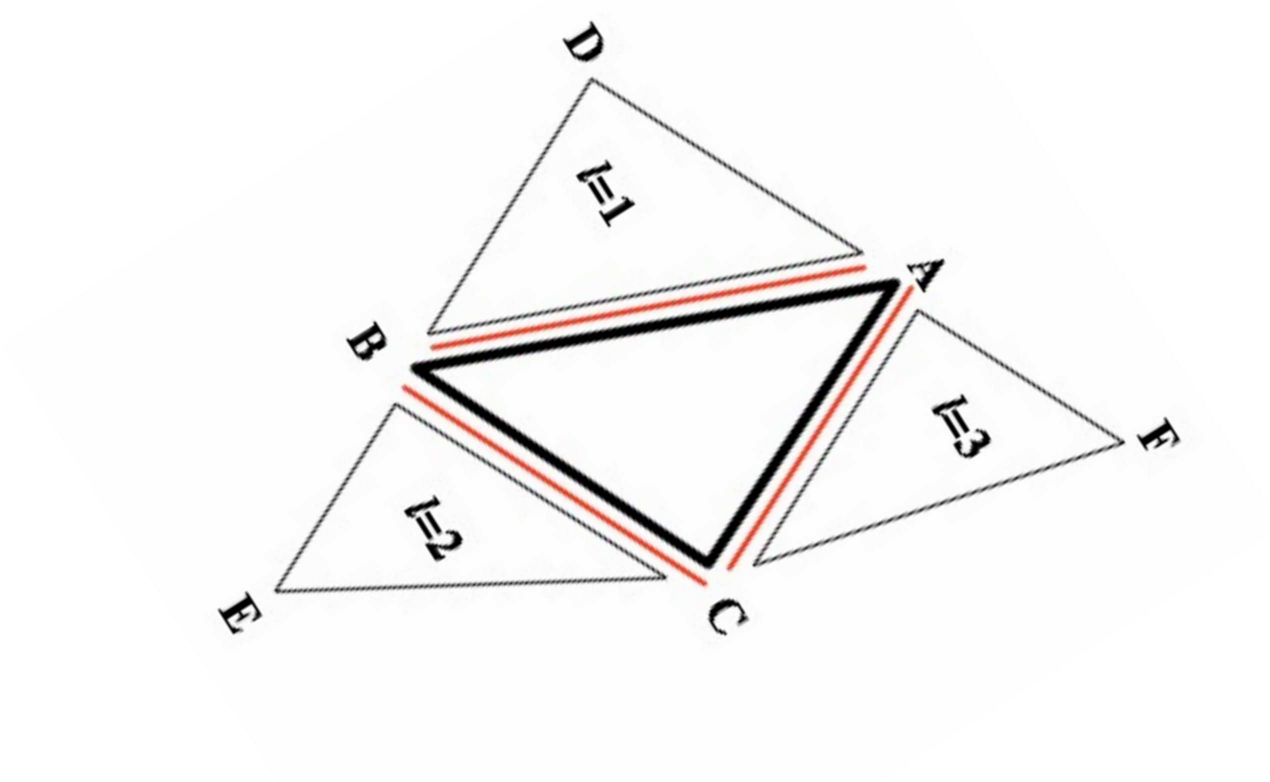
統一エネルギー原理が本格的活動できる舞台は大変形、安定問題（幾何学的非線形問題）と材料非線形問題（弾塑性、粘弾性、破壊）などである。固体問題に留まらず、粒子、原子核、固体等の凝集体、生物体質、生物等をもその適応対象と考えられる。この場合、応力-歪関係式をどの様に与えるかが問題であるが、伝統的なPrandtl-Reussの流れ理論に従い、統一エネルギー原理を基礎とする非弾性解析法をどのように再構築するが当面の課題である。

（７）**FOAへの対応**

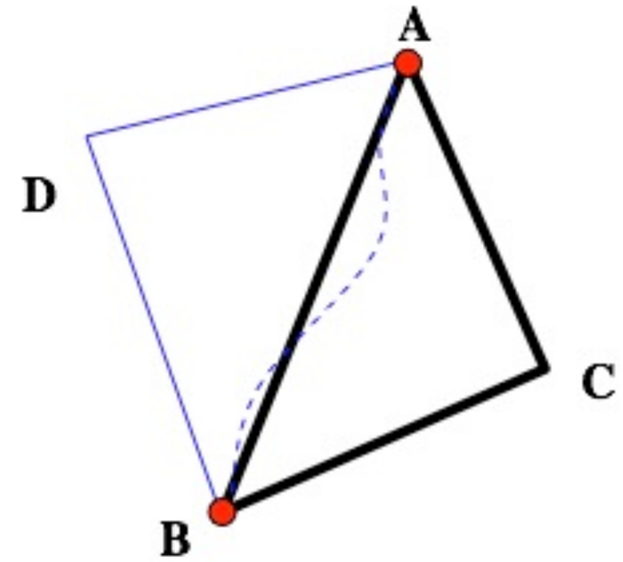
材料科学的方向の研究に対し、その反対の方向の計算力学の展開も今後のCAE時代の大きな研究課題であろう。その一例として、自動車の耐衝撃強度設計の問題で世界中のメーカーが時間とコストの削減に苦悩している課題がある。この問題をできるだけ梁または単純パネルの集合体にモデル化して解析をしようとするFOA（First Order Analysis）が注目されている。FOA実現の道は極限解析および設計（limit analysis & design）の知識化と考える。この課題は統一エネルギー原理の恰好の応

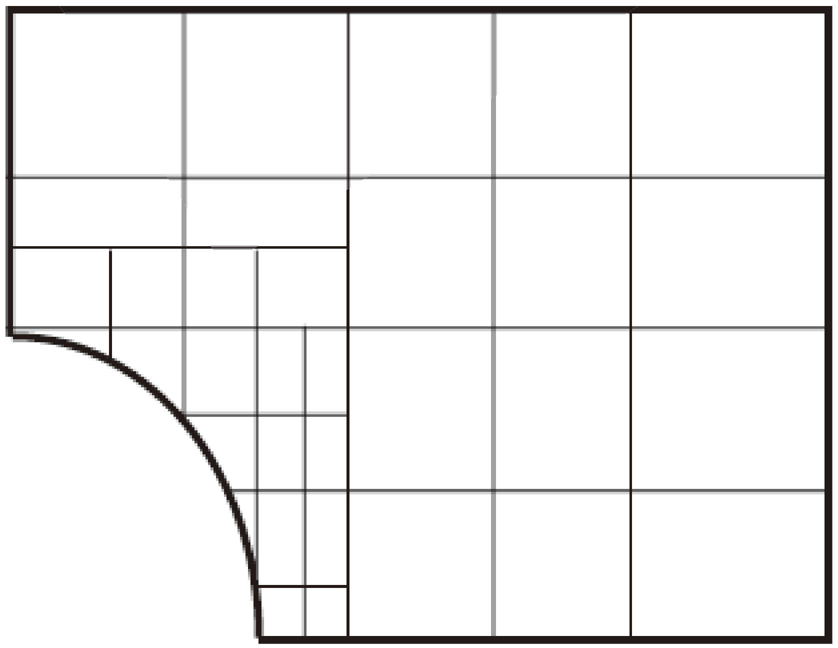
Non collocation method

無節点法

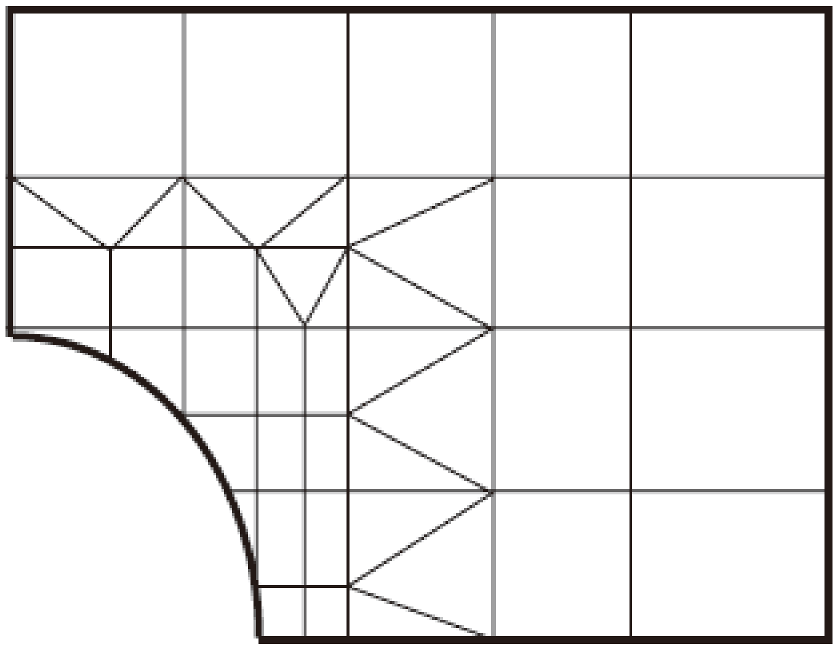


節点法





無節点法のメッシュ分割



節点法のメッシュ分割

統一エネルギー原理導出のプロセス

σ_{ij}

u_i

$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$

$t_i=\sigma_{ij}n_j$ $on\ S_\sigma$

$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$

$$\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV$$

Gaussの発散定理

$$\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV=\int_s t_i u_i dS-\int_v \sigma_{ij,j}u_i dV$$

固体力学境界値問題

$\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0 \quad in\ V$

$u_i=\bar{u}_j \quad on\ S_u$

$t_i=\bar{t}_j \quad on\ S_\sigma$

$S=S_u+S_\sigma$

エネルギー保存則

$for\ true\ u_i\ and\ \sigma_{ij}$

$$\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV=\int_v \bar{p}_i u_i dV+\int_{S_\sigma}\bar{t}_i u_i dS+\int_{S_u}\bar{u}_i t_i dS$$

$$\delta\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV-\int_v \bar{p}_i\delta u_i dV-\int_{S_\sigma}\bar{t}_i\delta u_i dS-\int_{S_u}\bar{u}_i\delta t_i dS=0$$

$(w.r.t.u_i\ \&\ \sigma_{ij})$

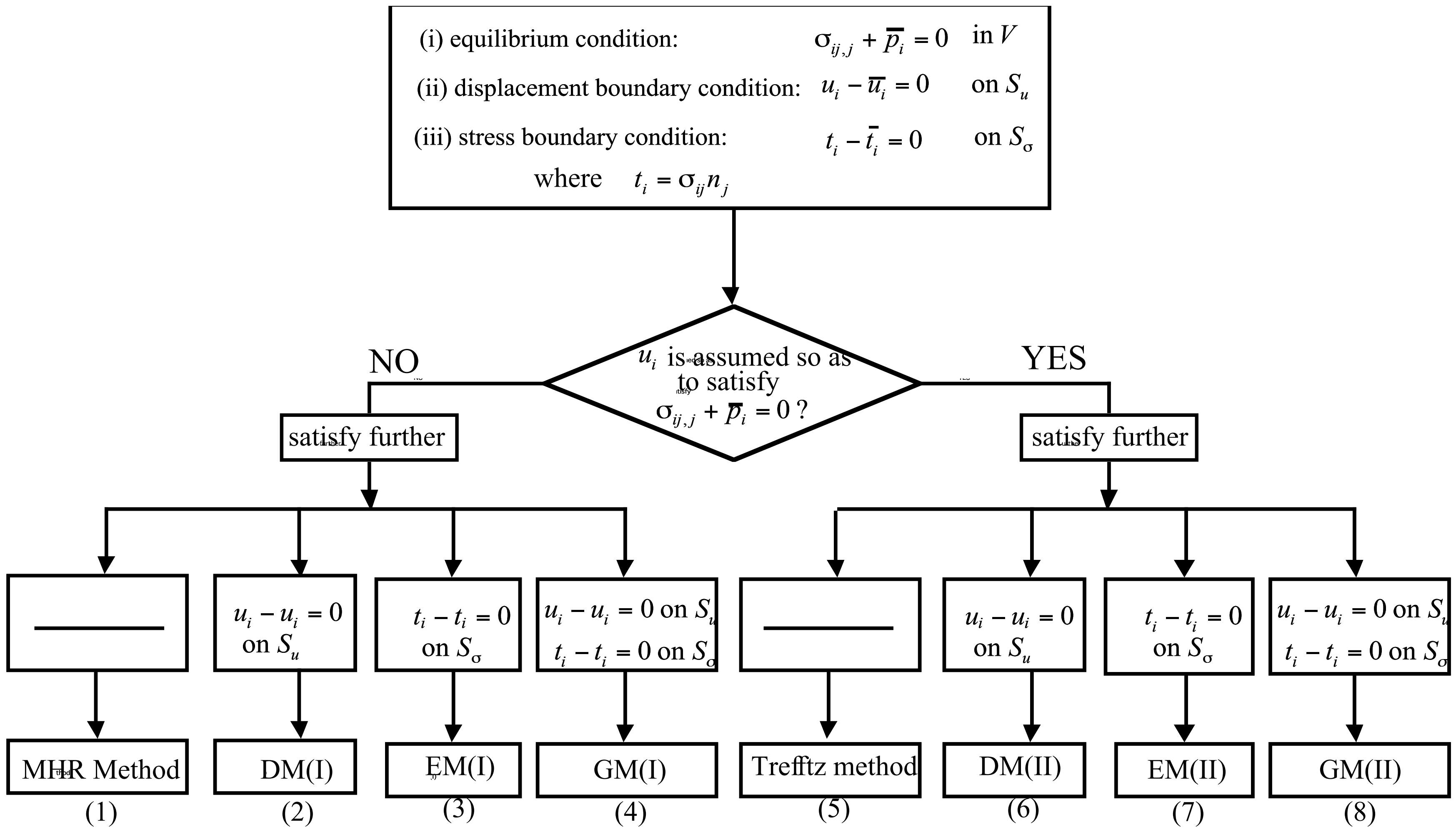
8 methods to be derived from Unified Energy Principle

se□□ $u_i(x_k)$□T□□l□ $_{ij}(x_k)$□□□□□□l□Mr□□□□□□□□ 8□□M□□

sol. No.	Variational Equations	constraint conditions	Remarks
1	$\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_i dS - \int_V(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_i dV=0$	———	general method including other 7 methods
2	$\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS-\int_V(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_i dV=0$	$u_i-\bar{u}_i=0$ on S_u	DM(I)
3	$\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS-\int_V(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_i dV=0$	$t_i-\bar{t}_i=0$ on S_σ	EM(I)
4	$\int_V(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_i dV=0$	$u_i-\bar{u}_i=0$ on S_u $t_i-\bar{t}_i=0$ on S_σ	GM (I)
5	$\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_i dS=0$	$\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ in V	Trefftz's method
6	$\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS=0$	$\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ in V $u_i-\bar{u}_i=0$ on S_u	DM(II)
7	$\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_i dS=0$	$\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ in V $t_i-\bar{t}_i=0$ on S_σ	EM(II)
8	———	$\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ in V $t_i-\bar{t}_i=0$ on S_σ $u_i-\bar{u}_i=0$ on S_u	GM(II), analytical solution

DM: Displacement Method
EM: Equilibrium Method
GM: Galerkin Method
(I) does not satisfy a priori
(II) satisfies a priori

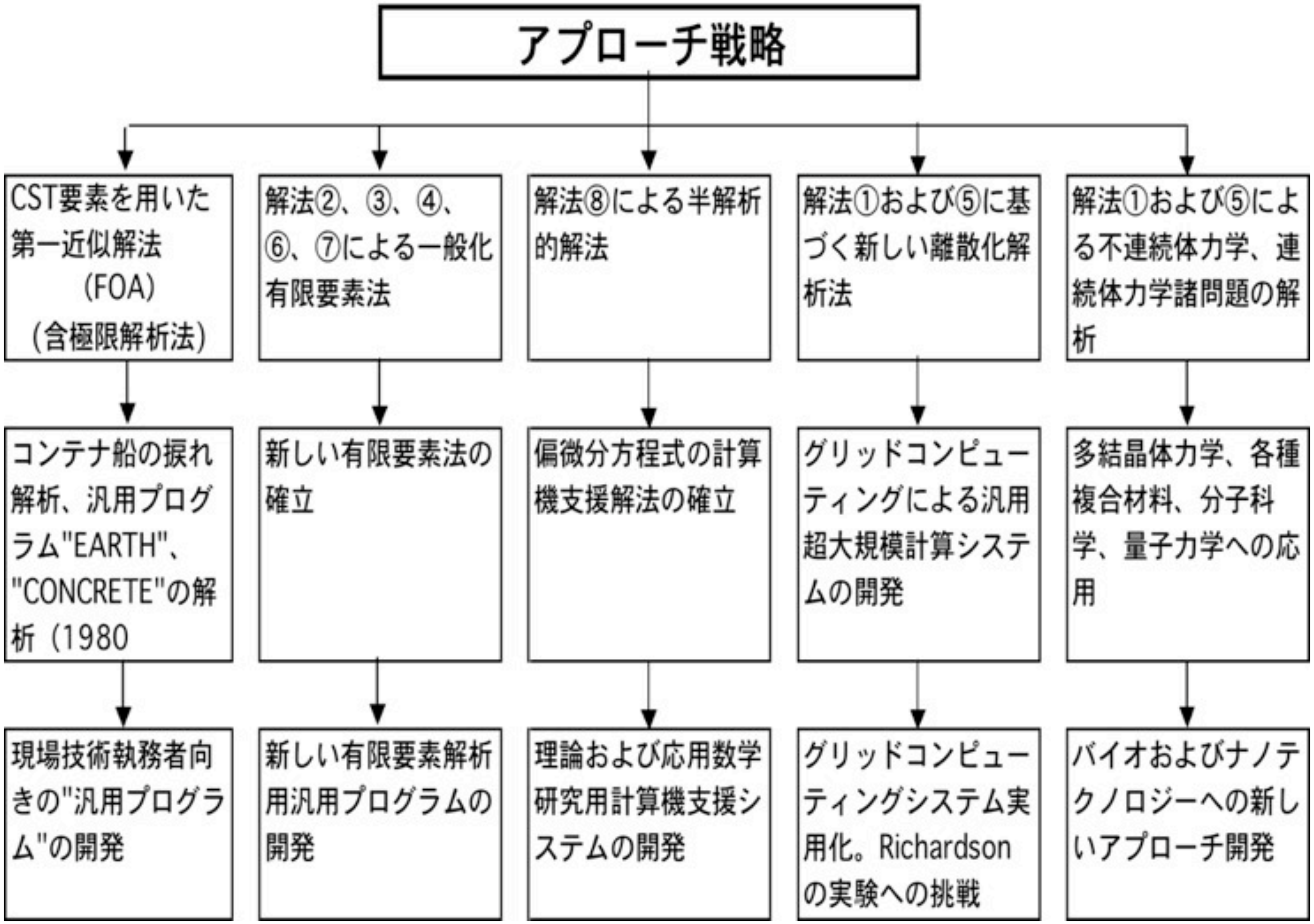
8 possible methods of solution on solid mechanics problems



remarks:

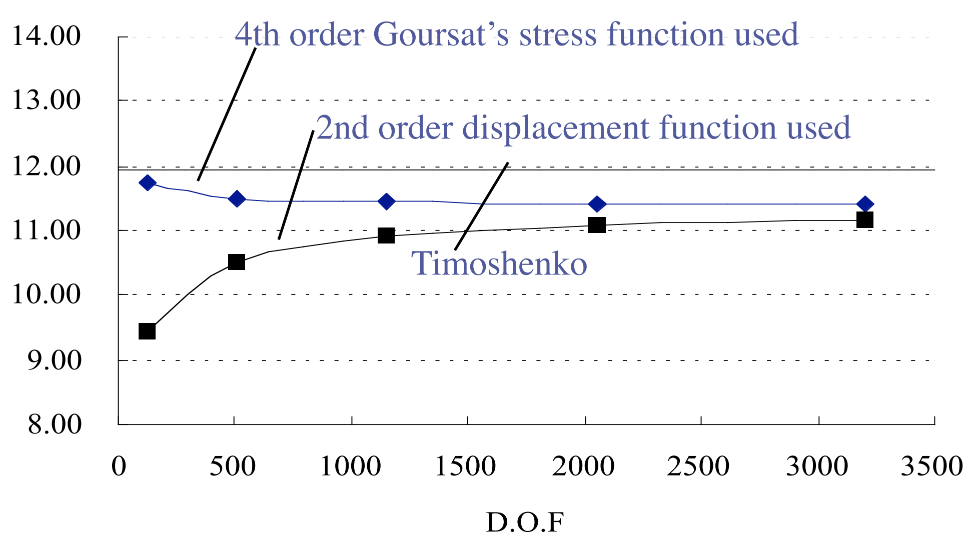
MHR Method: Modified Hellinger-Reissner Method
DM: Displacement Method
EM: Equilibrium Method or Force Method
GM: Galerkin Method
FEM is mainly based on DM(I), while Pian's Mixed Method covers DM(II) and EM(II), GM(II) is semi-analytical method of solution.

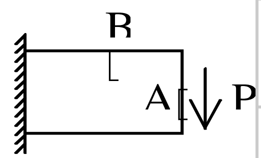
統一エネルギー原理


アプローチ戦略
CST要素を用いた第一近似解法 (FOA) (含極限解析法)
解法②、③、④、⑥、⑦による一般化有限要素法
解法⑧による半解析的解法
解法①および⑤に基づく新しい離散化解析法
解法①および⑤による不連続体力学、連続体力学諸問題の解析
コンテナ船の振れ解析、汎用プログラム"EARTH"、"CONCRETE"の解析（1980
新しい有限要素法の確立
偏微分方程式の計算機支援解法の確立
グリッドコンピューティングによる汎用超大規模計算システムの開発
多結晶体力学、各種複合材料、分子科学、量子力学への応用
現場技術執務者向きの"汎用プログラム"の開発
新しい有限要素解析用汎用プログラムの開発
理論および応用数学研究用計算機支援システムの開発
グリッドコンピューティングシステム実用化。Richardsonの実験への挑戦
バイオおよびナノテクノロジーへの新しいアプローチ開発

Inplane bending analysis of a cantilever plate subjected to a boundary shear of parabolic distribution (divided by square mesh)

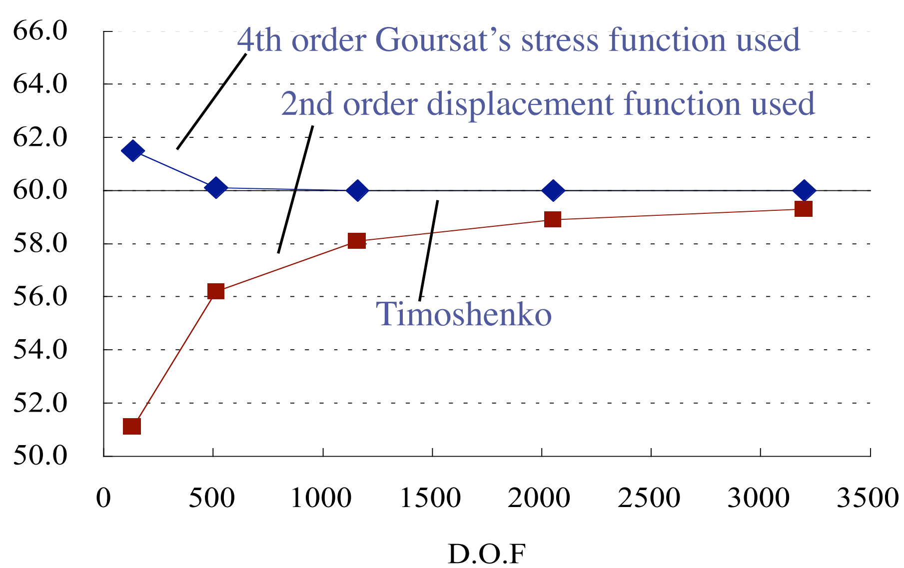
v_A : vertical displacement at the point A

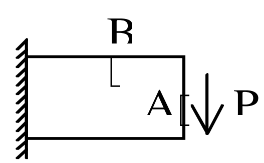




Mesh Div. x NDOF	stress function used	displacement function used
4x 2x 16	11.7195	9.4399
8x 4 x16	11.4996	10.5163
12x 6 x16	11.4347	10.9196
16 x8x 16	11.4063	11.0912
20x 10 x16	11.3909	11.178

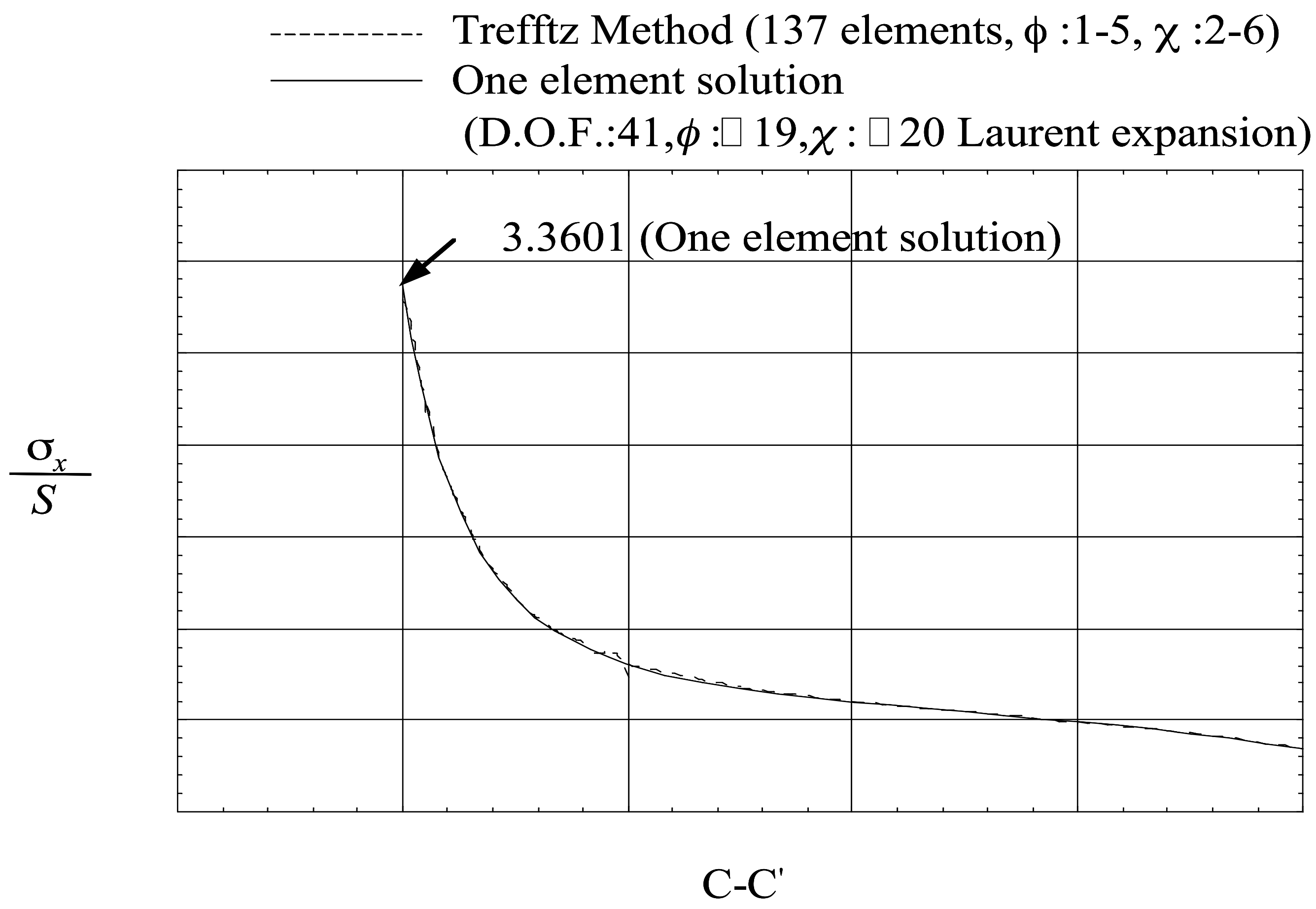
$(\sigma_x)_B$: stress at the point B

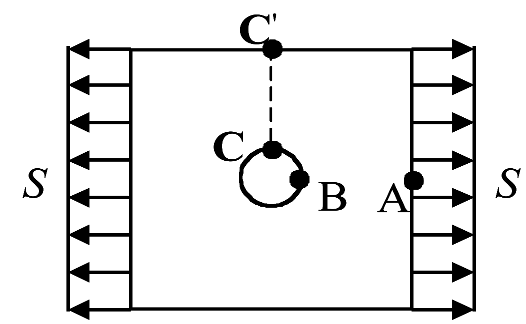


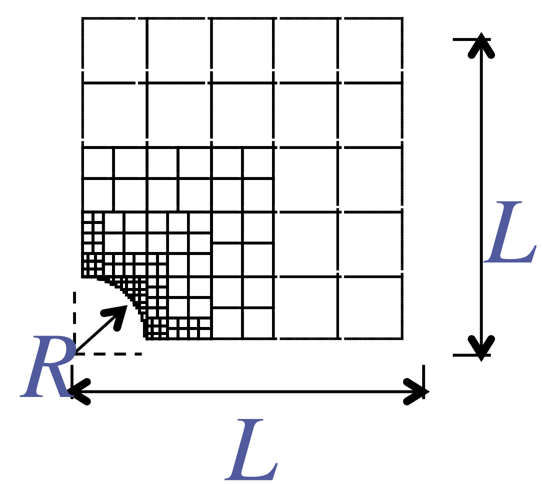


Mesh Div. x NDOF	stress function used	displacement function used
4x 2x 16	61.4766	51.0777
8x 4 x16	60.0641	56.1607
12x 6 x16	60.0287	58.1254
16 x8x 16	60.0138	58.8946
20x 10 x16	60.0071	59.2698

Stress distribution on section C-C’ of a perforated square plate under uniaxial uniform loading





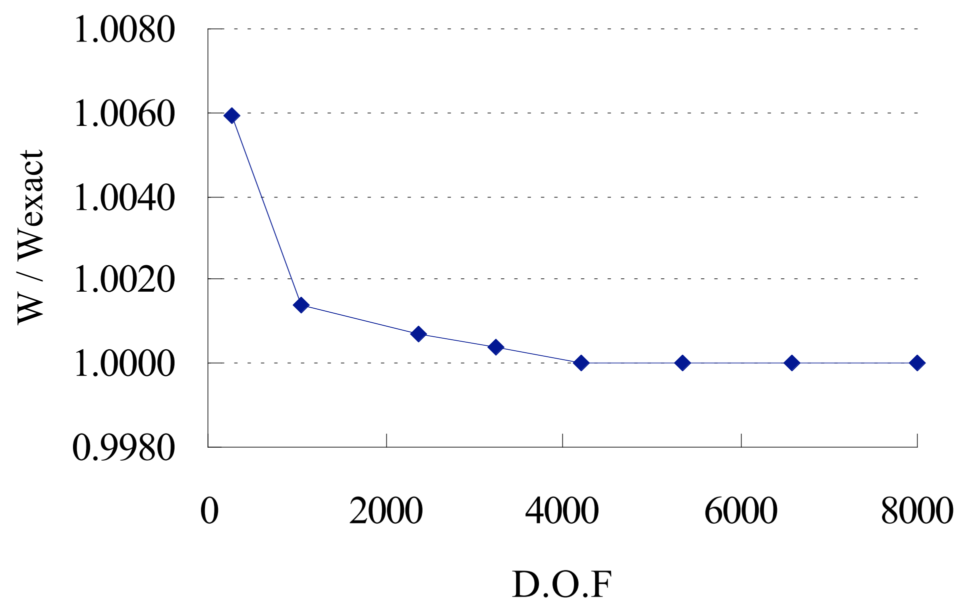


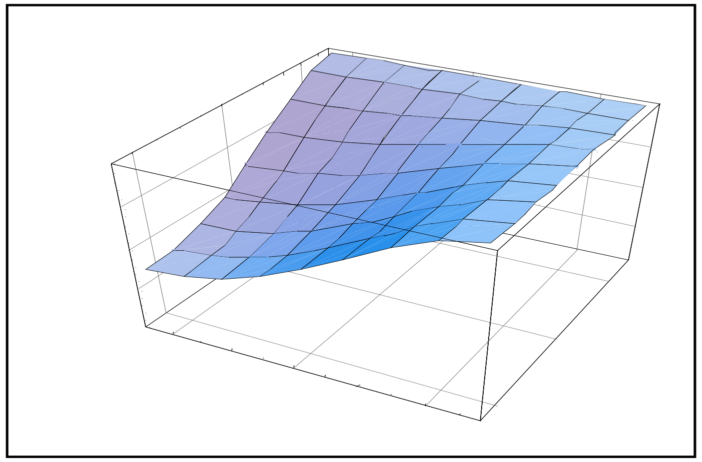
$R = 10\text{mm}, \quad L = 50\text{mm}, \quad S = 100\text{kgf/mm},$

$E = 20000\text{kgf/mm}^2, \quad \nu = 0.3$

Finite element bending analysis of a square plate under uniformly distributed load using the newly proposed variational method.

Nonequilibrium 10th order polynomials of (x,y) were used for analysis.





deflection (Mesh Div. NDOF = 8866)

Central deflection $w(0,0)$

Mesh Div NDOF	$w(0,0)$	w/w_{exact}
2 2 66	1.0059	1.27247
3 3 66	1.0014	1.26676
4 4 66	1.0014	1.26675
5 5 66	1.0006	1.26576
6 6 66	1.0007	1.26587
7 7 66	1.0004	1.26555
8 8 66	1.0000	1.26524
9 9 66	1.0000	1.26502
10 10 66	1.0000	1.26531
11 11 66	1.0000	1.26531

統一エネルギー原理

統一エネルギー原理の目指すところ

The winner of this year's Timoshenko Medal reminds us that engineering is more than piling complexity. Great engineers cut through to simple concepts, simple solutions.
It is a creative art

チモシェンコ・メダルを受賞したBiot博士は受賞講演において、次のように複雑系問題の解決への警告を述べました。

物理的な世界の理解、特に工学的応用の領域では、「何が無関係であるか」を知覚するのが重要です。私達は「単純化（Simple）」することを忘れてはなりません。

理論上の簡単さに導かれた物理的洞察は非常に複雑な問題の核心に導き、問題解決策の近道を提供します。簡単な場合でさえツールや方法のみでは、問題を解決することができません。

By M. A. Biot (Mem. ASME) from Mechanical Engineering Feb. 1963

そして、創造が求められる時代へ

コンピュータは石頭の巨人である。ITはそれに命令を下す方法を記述したマニュアルに過ぎない。それを操作して何かを創造して行くのは誰か？

Prandtlの境界層や乱流の理論やKármánの渦列や飛び移り座屈理論は現代でも光り輝いている。正に科学技術史を色取るのは「思想」である。

Henri Poincaré

非線形現象の解明に当たって大きな壁となるのはab initioとか、in vivo、in situという構成則の問題であろう。
換言すると複雑系の解明においては定量化を諦め、定性的研究が本命とせざるを得ないのでなかろうか。
かくして生まれたのがアンリ・ポアンカレの位相数学（topology）であろう。

科學ガ進ムニ從ッテソノ全部ヲ抱括スルコトガ段々困難ニナル。ソコデ人ハ科學ヲ片手ニ切リ離シテ、ソノ一片ヲ以テ満足スル。即チ専門的ニナル。若シコノヨウナ傾向ガ増長スルナラバ、ソレハ科學ノ發達ニトッテハ憂フベキ障害デアラウ。異ナル部分ノ思ハヌ接觸カラコソ科學ノ進歩ガ起ノデアル。

Tadahiko Kawai

Tadahiko Kawai was born in Tokyo in 1926 and studied in the Department of Naval Architecture, University of Tokyo, gaining his B.Eng. in 1952. He obtained a PhD in civil engineering from Lehigh University, USA in 1957 and also received a Dr.Eng. from the University of Tokyo in 1962. He began as a researcher (1958–1963) in the Airframe Division, National Aerospace Laboratory, Tokyo. In 1963 he joined the faculty of the University of Tokyo, and was promoted to full professor in 1971. He was a visiting professor at the State University of New York at Buffalo (1966–1967). He retired from the University of Tokyo in 1986, and became Professor Emeritus. Subsequently, he joined the research faculty of the Science University of Tokyo until 1998.